代 数 拓 扑 学

E. H. 斯潘尼尔 著
左再思 译
廖山涛 校

上海科学技术出版社

内容提要

本书是 E. H. Spanier 著《代数拓扑学》一书中的第一部分——前三章．是代数拓扑学的入门，也是代数拓扑学的重要基础．主要内容包括：同伦和基本群；覆叠空间和纤维化；多面体．书中例题、习题丰富．叙述简洁流畅，逻辑严谨．

本书可作为大学数学系中有关专业的高年级学生及研究生的教材和参考书．

ALGEBRAIC TOPOLOGY

Edwin H. Spanier

McGraw-Hill Book Company

代数拓扑学

E. H. 斯潘尼尔　著

左再思　译

廖山涛　校

责任编辑　赵序明

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 6.125　字数 161,000

1987 年 8 月第 1 版　1987 年 8 月第 1 次印刷

印数 1— 5,900

统一书号：13119·1427　　定价：1.80 元

译　　序

Edwin H. Spanier 的 Algebraic Topology 一书，在 1966 年由 McGraw-Hill 出版，至今已有二十年了．二十年来，我们看到国内外不少代数拓扑的专著和教程问世，各有其特点．但是，这本书尽管不可能包括这二十年新出现的成果，却仍未减其光彩．作者以其对代数拓扑的广泛研究和深刻理解，以其收集材料之丰富，叙述之简洁流畅，逻辑之严谨，取舍之得当，使这本书至今仍是代数拓扑学的不可多得的好教材和参考书．到了八十年代，Springer-Verlag 还再版此书，也从某个侧面说明了这一点．

1975 年，又一本不可多得的好书问世了，即 Robert M. Switzer 的 Algebraic Topology-Homotopy and Homology (Springer-Verlag 出版)．作者在序言中写道："近几年来，基础代数拓扑的一系列优秀的教科书出版了，其中最值得注意的是 Spanier 的书，我主张将其作为本书的姐妹篇．" Switzer 的书写成于 1973 年，自然比本书多了不少近代内容；而且不言而喻，会汲取本书的长处及弥补一些不足之处．孙以丰教授、吴振德教授先后选用该书作为研究生的教材，在吉林大学和河北师范大学使用．译者亦步二位师长之后尘．通过实践，一方面确实感到是一本很好的书；另一方面又感到作者为了尽量多地收入近代的结果而不得不将叙述浓缩，抽象．不仅增加了教学的难度，也删去了不少精彩的内容．例如关于覆叠空间，就是一带而过，让需要的读者去查阅 Spanier 的书．因此，这两本书各有长处，其作用不能互相取代．这就是时至今日，出版本书仍有必要的理由之一．

Spanier 曾问译者：那么，为什么不同时也将 Switzer 的书译成中文呢？对此的解释是：到了可以自学该书的程度，读两种文字

的效果已无甚差别了.

译者在1975年初次见到本书，即为其深深吸引住。同时，便产生了将其译成中文，介绍给国内同行和青年的强烈愿望。北京大学教授江泽涵先生、廖山涛先生对此给以热情的鼓励和支持。后经暨南大学梁文骐先生的介绍，被上海科学技术出版社列入出版计划。廖山涛先生用了大量时间仔细阅读了全书的译稿，对于翻译错误及不妥之处逐字进行了细致的修改和校正。江泽涵先生对于译文的出版始终给以亲切的关注，多次对译者提出指导性的意见。北京大学教授姜伯驹先生及参加1982年烟台会议的各位老师和同行也给以关心和鼓励。出版社的编辑则对译稿进行了认真的加工和文字校正。

但是，后来由于某些客观原因，经出版社与译者商定，先印出这个大体上相当于一个学期教学量的前三章的"节译本"，以应教学之急需。至于全文的出版，以后根据情况再定。

译者在此向江泽涵先生、廖山涛先生表示衷心的敬意和感谢，同时感谢姜伯驹先生、梁文骐先生以及各位关心过此书的同行和同事，感谢编辑同志的辛勤劳动。并借此机会，遥向大洋彼岸的E. H. Spanier教授致意，感谢他对译者的鼓励及寄来原书的支持。衷心希望全书早日问世。

* * *

原书共分为九章，它们的标题是：1. 同伦和基本群；2. 覆叠空间和纤维化；3. 多面体；4. 同调；5. 乘积；6. 一般上同调论和对偶性；7. 同伦论；8. 阻碍理论；9. 谱叙列和球的同伦群。

作者在前言中指出：这九章可分成三部分，每部分三章，分别介绍基本群，同调论和同伦论的基础内容。因此，如把全书按这三部分译为三个分册，则由前三章组成的这个节译本实质上便是第一分册。

另一方面，这三部分彼此又是有机地联系的。前面为后面作了大量的准备。这些准备本身也是代数拓扑学的重要基础内容。因此，用"基本群"一个词汇概括这部分并不完全。而说成"代数拓

扑入门”可能更恰当些.

第 1 章的八个小标题标明本章向读者介绍的概念. 它们(或许可以不包括基本广群)可说是学习现代代数拓扑学的最基本的概念. 全章包含了入门的主要知识，是每个学习代数拓扑学或邻近学科的学习者所必不可少的.

第 2 章系统而全面地叙述覆叠空间的理论，以及纤维丛，纤维化的入门知识. 本章是这部分最精彩的内容. 通过学习不仅可以掌握所介绍的概念和结论，而且可以学到不少代数拓扑学中论证的典型方法.

第 3 章介绍多面体和单纯复形的理论. 虽然原书前言说是解决基本群的计算问题，但事实上也为同调论作了大量准备. 由于单纯逼近定理已被包含在本章中，以后介绍同调论时，最麻烦的不变性问题(或单纯同调与奇异同调的自然等价问题)实质上已提前在此通过了关键的步骤. 本章最后一些应用举例，也是很精彩的.

原书的第 1 章之前，还有一个引言，介绍本书所需要的集合论等有关概念，结论和记号约定. 除了模以外，前三章都有用. 由于篇幅不多，为保持完整性，全文都照译了. 另外，补了几本重要的中文参考书.

作者在前言中开宗明义地指出：“本书特别强调自然性的地位，故可恰当地称之为*函子式拓扑学*.”换言之，本书以函子的语言处理所有的重要问题，概念，结论和方法，形成本书的一大特色，也是它的突出的优点. 国内迄今出版的代数拓扑的书，包括译著在内，还都没有这样写的. 这样的处理，比之传统的处理具有很大的优越性. 因此无论本科生还是研究生，学习代数拓扑都宜采取这个“*函子式*”的体系.

原书每章后附有许多习题. 作者在前言中指出：“这些习题被分成一些组，每组致力于单个的专题或少量彼此有关系的专题. 除去个别例外，正文中不会引用它们. 习题分几种类型. 一种是该章中研究的一般理论的例子；一种是处理以后将讨论的一般课题的特殊情况；还有一种是提供在所有课文中未讨论到的课题. 既

有常规的习题，又有较困难的习题，后者常常附有提示，告诉读者怎样着手．也有时把一个与课文素材有关的课题放在一组习题中来展开讨论．”

每章配备了若干组内容丰富、难易结合的习题，成为原书的又一特色．迄今见到的国内外代数拓扑的教科书，很少有能与之媲美的．这里也体现了作者的匠心．如果学生能够结合学习而基本作完这些习题，便具备了很好的代数拓扑的基础了．

对于原书上一些明显的排印错误，译成中文已予以改正．对于一些作者的疏忽之处，如使用了未给出的概念和记号以及某些误用的记号等等，都加了译注，按译者的理解给以解释．这些理解不见得恰当，尚希读者批评指正．

左再思

1986 年于华南师范大学

目　录

引言 ……………………………………1
　§1　集合论 ……………………………1
　§2　一般拓扑 …………………………4
　§3　群论 ………………………………7
　§4　模 …………………………………8
　§5　欧氏空间 …………………………11
第1章　同伦和基本群 …………………14
　§1　范畴 ………………………………14
　§2　函子 ………………………………20
　§3　同伦 ………………………………25
　§4　收缩和形变 ………………………31
　§5　H空间 ……………………………39
　§6　同纬映象 …………………………45
　§7　基本广群 …………………………52
　§8　基本群 ……………………………57
　第1章习题 ……………………………65
第2章　覆叠空间和纤维化 ……………69
　§1　覆叠投射 …………………………69
　§2　同伦升腾性质 ……………………73
　§3　与基本群的关系 …………………79
　§4　升腾问题 …………………………84
　§5　覆叠投射的分类 …………………90
　§6　覆叠变换 …………………………97
　§7　纤维丛 ……………………………103
　§8　纤维化 ……………………………112
　第2章习题 ……………………………121
第3章　多面体 …………………………124
　§1　单纯复形 …………………………125
　§2　单纯复形中的线性性质 …………132
　§3　重分 ………………………………140
　§4　单纯逼近 …………………………148
　§5　邻接类 ……………………………152
　§6　棱道广群 …………………………158
　§7　图 …………………………………163
　§8　例子和应用 ………………………169
　第3章习题 ……………………………177
索引 ……………………………………182

引　　言

我们假定本书的读者对于集合论、一般拓扑和代数的初步概念已有所了解．下面是本书中应用到的这些领域中的一些概念和结果的简单摘要．这些内容所以如此明确列出，或则由于它们不是已经规范化了的，或则由于它们在以后的课文中有着特别的重要性．

§1　集　合　论*)

术语"集合"、"族"和"聚集"同义；术语"类"则留给不假定是集合的总汇(例如，所有集合的类)．若 X 为一集合，$P(x)$ 为对每个元素 $x\in X$ 的一个判断，或为真，或为假，则以

$$\{x\in X\,|\,P(x)\}$$

记使 $P(x)$ 为真的那些 x 组或的 X 的子集．

若 $J=\{j\}$ 是一集合，且 $\{A_j\}$ 为一指标取在 J 的集合族，则它们的并集记为 $\cup A_j$ (或记为 $\bigcup_{j\in J}A_j$)，它们的交集记为 $\cap A_j$ (或 $\bigcap_{j\in J}A_j$)，它们的笛卡儿积记为 $\times A_j$ (或 $\times_{j\in J}A_j$)，它们的集合和(或称它们的分离并)记为 $\vee A_j$ (或 $\bigvee_{j\in J}A_j$)，由 $\vee A_j=\cup(j\times A_j)$ 定义．在 $J=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的情况下，我们也用记号 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 及 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ 分别表示并，交，笛卡儿积及集合和．

从 A 到 B 的一个函数(或映射)记为 $f\colon A\to B$．从 A 到 B 的所有函数的集合记为 B^A．若 $A'\subset A$，则存在一包含映射

*) 作为一般参考书，可看 P. R. Halmos, "*Naive Set Theory*", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1960. ——原注

i: $A'\to A$，且以记号 i: $A'\subset A$ 表示 A' 是 A 的子集，并且 i 是包含映射．从一集合 A 到自身的包含映射称作 A 的恒同映射，记为 1_A．若 $J'\subset J$，则有一包含映射

$$i_{J'}:\ \bigvee_{j\in J'} A_j\subset \bigvee_{j\in J} A_j.$$

在一集合 A 中的一个等价关系，是 A 的元素之间的一个关系～，它是自反的(亦即，对所有 $a\in A$，有 $a\sim a$)，对称的(亦即，对 a、$a'\in A$，$a\sim a'$ 蕴涵 $a'\sim a$)，传递的(亦即，对 a, a', $a''\in A$，$a\sim a'$ 和 $a'\sim a''$ 蕴涵 $a\sim a''$)．$a\in A$ 关于关系～的等价类是子集 $\{a'\in A|a\sim a'\}$．A 的元素关于～的所有等价类的集合记为 $A/\sim$，称为 A 的商集．存在投射 $A\to A/\sim$，把 $a\in A$ 变到它的等价类．若 J' 为 J 的子集，则也有一个投射

$$p_{J'}:\ \bigtimes_{j\in J} A_j\to \bigtimes_{j\in J'} A_j$$

(是为上述意义下的投射)．

给定函数 f: $A\to B$ 和 g: $B\to C$，它们的合成 $g\circ f$ (也记为 gf)是从 A 到 C 的一个函数，由 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$ $(a\in A)$所定义．若 $A'\subset A$，及 f: $A\to B$，f 在 A' 上的限制是指函数 $f|A'$: $A'\to B$，由 $(f|A')(a')=f(a')$ $(a'\in A')$所定义．(这样，$f|A'=f\circ i$，其中 i: $A'\subset A$)，且函数 f 称为 $f|A'$ 到 A 的扩充．

一个单映(或称单函数)是一个函数 f: $A\to B$，满足 $f(a_1)=f(a_2)$ 蕴涵 $a_1=a_2$，对 a_1、$a_2\in A$．一个满映(或称满函数)是一个函数 f: $A\to B$，使得 $b\in B$ 蕴涵存在 $a\in A$ 使 $f(a)=b$．一个双映(或称双函数，或称一一对应)是既为单映又为满映的函数．

在一集合 A 内的一个偏序是 A 的元素间的一个关系 $\leqslant$，它是自反的和传递的 (注意这里未假定 $a\leqslant a'$ 和 $a'\leqslant a$ 蕴涵 $a=a'$*))．A 内的一个全序(或称单序)是 A 内的一个偏序，使对 a、$a'\in A$，总有 $a\leqslant a'$ 或 $a'\leqslant a$；且它是反称的(即 $a\leqslant a'$ 和 $a'\leqslant a$ 蕴涵 $a=a'$)．一个偏序集是一个带有偏序的集合，一个全序集是一个带有全序

*) 有些文献中偏序的定义是假定这个条件的．读者在查阅有关结论时宜注意此区别．——译注

的集合.

1. **Zorn 引理** 一个偏序集中，若任一全序子集有上界，则此偏序集包含极大元素.

一个顺向集 Λ 是一个带有偏序 $\leqslant$ 的集合，使得对 α、$\beta\in\Lambda$，存在 $\gamma\in\Lambda$，使 $\alpha\leqslant\gamma$ 和 $\beta\leqslant\gamma$. 集合的一个顺向体系 $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 以下述方式组成，即：一族集合 $\{A^\alpha\}$，其指标取于一个顺向集 $\Lambda=\{\alpha\}$，以及一族函数 f_α^β: $A^\alpha\to A^\beta$，对每一对 $\alpha\leqslant\beta$，使得

(a) $f_\alpha^\alpha=1_{A^\alpha}$: $A^\alpha\subset A^\alpha$，对所有 $\alpha\in\Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma=f_\beta^\gamma\circ f_\alpha^\beta$: $A^\alpha\to A^\gamma$，对 Λ 中的 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$.

顺向体系的顺向极限记为 $\lim_\to\{A^\alpha\}$，是 $\vee A^\alpha$ 的等价类的集合，其等价关系 $a^\alpha\sim a^\beta$ 为：若有 γ 使 $\alpha\leqslant\gamma$ 及 $\beta\leqslant\gamma$，则 $f_\alpha^\gamma a^\alpha=f_\beta^\gamma a^\beta$. 对每个 α，存在一个映射 i_α: $A^\alpha\to\lim_\to\{A^\alpha\}$，且若 $\alpha\leqslant\beta$，则 $i_\alpha=i_\beta\circ f_\alpha^\beta$.

2. 给定一个集合的顺向体系 $\{A^\alpha, f_\alpha^\beta\}$，且给定一个集合 B，及对每个 $\alpha\in\Lambda$，给定一个函数 g_α: $A^\alpha\to B$，使 $g_\alpha=g_\beta\circ f_\alpha^\beta$，若 $\alpha\leqslant\beta$. 则存在唯一映射 g: $\lim_\to\{A^\alpha\}\to B$，使对所有 $\alpha\in\Lambda$，$g\circ i_\alpha=g_\alpha$.

3. 在定理 2 所用的同样记号下，映射 g 是双映，当且仅当下列两条成立：

(a) $B=\bigcup g_\alpha(A^\alpha)$;

(b) $g_\alpha(a^\alpha)=g_\beta(a^\beta)$ 当且仅当存在 γ，使 $\alpha\leqslant\gamma$，$\beta\leqslant\gamma$，$f_\alpha^\gamma(a^\alpha)=f_\beta^\gamma(a^\beta)$.

设 $\{A_j\}$ 是指标取于 $J=\{j\}$ 的集合族. 设 Λ 是 J 的有限子集族，且定义 $\alpha\leqslant\beta$，对于 α，$\beta\in\Lambda$，由 $\alpha\subset\beta$，则 Λ 是一顺向集，且存在一顺向体系 $\{A^\alpha\}$ 由 $A^\alpha=\bigvee_{j\in\alpha}A_j$ 定义；并且，若 $\alpha\leqslant\beta$，则令 f_α^β: $A^\alpha\to A^\beta$ 是包含映射. 记 g_α: $A^\alpha\to\bigvee_{j\in J}A_j$ 为包含映射.

4. 在上述记号下，存在一个双映

$$g:\ \lim_\to\{A^\alpha\}\to\bigvee_{j\in J}A_j,$$

使 $g\circ i_\alpha=g_\alpha$（亦即，任意集合和是其有限部分集合和的顺向极限）.

一个集合的逆向体系 $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 以下述方式组成，即：一个指标

取于顺向集合 $\Lambda=\{\alpha\}$ 的集合族 $\{A_\alpha\}$, 及一函数族 f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$ 对 $\alpha\leqslant\beta$ 使得:

(a) $f_\alpha^\alpha=1_{A_\alpha}$: $A_\alpha\subset A_\alpha$ 对 $\alpha\in\Lambda$;

(b) $f_\alpha^\gamma=f_\alpha^\beta\circ f_\beta^\gamma$: $A_\gamma\to A_\alpha$ 对 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\in\Lambda$.

逆向体系的逆向极限记为 $\lim_\leftarrow\{A_\alpha\}$, 是 $\times A_\alpha$ 的子集, 由所有如下所述的点 (a_α) 组成, 即: 若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $a_\alpha=f_\alpha^\beta a_\beta$. 对每个 α, 存在映射 p_α: $\lim_\leftarrow\{A_\alpha\}\to A_\alpha$, 且若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $p_\alpha=f_\alpha^\beta\circ p_\beta$.

5. 给定一个集合的逆向体系 $\{A_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, 并给定一个集合 B 和对任一 $\alpha\in\Lambda$ 的一个函数 g_α: $B\to A_\alpha$ 使 $g_\alpha=f_\alpha^\beta\circ g_\beta$, 若 $\alpha\leqslant\beta$, 则存在唯一的函数 g: $B\to\lim_\leftarrow\{A_\alpha\}$ 使对所有的 $\alpha\in\Lambda$, $g_\alpha=p_\alpha\circ g$.

6. 在定理 5 的相同记号下, 映射 g 是双映, 当且仅当下列两条件成立:

(a) $g_\alpha(b)=g_\alpha(b')$ 对所有 $\alpha\in\Lambda$, 蕴涵 $b=b'$;

(b) 给定 $(a_\alpha)\in\times A_\alpha$, 使 $a_\alpha=f_\alpha^\beta a_\beta$ (若 $\alpha\leqslant\beta$), 则存在 $b\in B$, 使对所有的 $\alpha\in\Lambda$, $g_\alpha(b)=a_\alpha$.

设 $\{A^j\}$ 是一指标取于 $J=\{j\}$ 的集合族. 设 Λ 是 J 的有限非空子集族, 且定义对 α, $\beta\in\Lambda$, $\alpha\leqslant\beta$, 若 $\alpha\subset\beta$, 则 Λ 是一顺向集合, 且存在一个逆向体系 $\{A_\alpha\}$, 由 $A_\alpha=\times_{j\in\alpha}A^j$ 定义, 并且若 $\alpha\leqslant\beta$, 则 f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$ 是投射, 对每个 $\alpha\in\Lambda$. 令 g_α: $\times_{j\in J}A^j\to A_\alpha$ 为投射.

7. 在上述记号下, 存在双映 g: $\times_{j\in J}A^j\to\lim_\leftarrow\{A_\alpha\}$, 使 $g_\alpha=p_\alpha\circ g$ (亦即, 任意笛卡儿积是其有限的部分笛卡儿积的逆向极限).

§2 一般拓扑[*]

一个拓扑空间也简称为一个空间, 除非明确说明, 我们并不假

[*] 作为一般的参考书见 J. L. Kelley: *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, N. J., 1955 和 S. T. Hu: *Elements of General Topology*, Holden-Day, Inc. San Francisco, 1964.——原注

定它满足任何可分离性的公设. 但对于拟紧致的, 正规的和正则空间, 我们始终假定都是 Hausdorff 空间. 从一拓扑空间到另一个的连续映射也被简称为映射.

给定一个集合 X 和一族拓扑空间 $\{X_j\}_{j\in J}$ 及函数 f_j: $X\to X_j$, 在 X 上由函数 $\{f_j\}$ 诱导的拓扑是使每个 f_j 都连续的最小的或称最粗的拓扑.

1. 在 X 上由函数 $\{f_j$: $X\to X_j\}$ 诱导的拓扑由下述性质所示性: 若 Y 是一拓扑空间, 则函数 g: $Y\to X$ 是连续的, 当且仅当 $f_j\circ g$: $Y\to X_j$ 对每个 $j\in J$ 都连续.

拓扑空间 X 的子空间是 X 的一子集 A, 其拓扑由包含映射 $A\subset X$ 诱导. 拓扑空间 X 的离散子集是 X 的一个子集, 它的每个子集在 X 中都是闭子集. 带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 的拓扑积是笛卡儿积 $\times X_j$, 其拓扑由投射 p_j: $\times X\to X_j$, 对每个 $j\in J$ 诱导出. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一个拓扑空间的逆向体系(即 X_α 对每个 $\alpha\in A$ 皆为拓扑空间, 且 f_α^β: $X_\beta\to X_\alpha$ 是连续的, 对 $\alpha\leqslant\beta$), 其逆向极限 $\lim_{\leftarrow}\{X_\alpha\}$ 由函数 $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 诱导出拓扑, 其中

$$p_\alpha\text{: } \lim_{\leftarrow}\{X_\alpha\}\to X_\alpha \quad (\alpha\in A).$$

给定一个集合 X 和带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 以及函数 g_j: $X_j\to X$ $(j\in J)$. 在 X 上由函数 $\{g_j\}$ 上诱导的拓扑是使每个 g_j 为连续的最大的或称最细的拓扑.

2. 在 X 上由函数 $\{g_j$: $X_j\to X\}$ 上诱导的拓扑由下述性质所示性: 若 Y 是任一拓扑空间, 则函数 f: $X\to Y$ 连续, 当且仅当 $f\circ g_j$ $X_j\to Y$ 对每个 $j\in J$ 都连续.

拓扑空间 X 的商空间是 X 的一个商集 X', 其拓扑自投射 $X\to X'$ 上诱导出. 若 $A\subset X$, 则 X/A 记 X 的商空间, 它由将整个 A 等同为一个点而得到. 带指标的拓扑空间族 $\{X_j\}_{j\in J}$ 的拓扑和为集合和 $\vee X_j$, 其拓扑由单映 i_j: $X_j\to\vee X_j$ $(j\in J)$ 上诱导出. 若 $\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是拓扑空间的顺向体系(亦即 X_α 都是拓扑空间 $(\alpha\in A)$, 且 f_α^β: $X^\alpha\to X^\beta$ 都是连续的, $\alpha\leqslant\beta$), 其顺向极限 $\lim_{\rightarrow}\{X^\alpha\}$ 由函数 $\{i_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 上诱导出拓扑, 其中,

$$i_\alpha: X^\alpha \to \lim_\to \{X^\alpha\}, \alpha \in A.$$

设 $\mathscr{A}=\{A\}$ 是拓扑空间 X 的子集族. X 称作具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑, 若 X 上的拓扑由子空间 $\{A\}$ 的包含映射 $\{A\subset X\}$ 上诱导出. (在一些文献上这种拓扑常被称为关于 $\mathscr{A}$ 的弱拓扑.)

3. X 具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑的充分必要条件是: X 的子集 B 在 X 中是闭的(或开的), 当且仅当 $B\cap A$ 在子空间 $A(A\in\mathscr{A})$ 中是闭的(或者相应地是开的).

4. 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的任一开覆盖或局部有限闭覆盖, 则 X 具有对 $\mathscr{A}$ 的上凝聚拓扑.

5. 设 X 是一个集合, $\{A_j\}$ 是个带指标的拓扑空间族, 每个 A_j 都是 X 的子集. 设对每个 j 和 j', $A_j\cap A_{j'}$ 是 A_j 及 $A_{j'}$ 中的闭(或开)子集, 并且 $A_j\cap A_{j'}$ 从 A_j 诱导的拓扑等于它从 $A_{j'}$ 诱导的拓扑. 则在 X 上由包含映射 $\{A_j\subset X\}$ 上诱导的拓扑, 被下述性质所示性: 对每个 j, A_j 是 X 的闭(或开)子空间, 且 X 具有对族 $\{A_j\}$ 的上凝聚拓扑.

定理5中 X 上的拓扑被称作是对 $\{A_j\}$ 的上凝聚拓扑.

一个紧致生成的空间是个 Hausdorff 空间, 具有对其紧致子集族的上凝聚拓扑. (有些文献中又叫作 Hausdorff k 空间.)

6. 一个 Hausdorff 空间是局部紧致的或满足第一可数性公设, 是紧致生成的.

7. 若 X 是紧致生成的, Y 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 则 $X\times Y$ 是紧致生成的.

若 X 和 Y 是拓扑空间, 且 $A\subset X$ 及 $B\subset Y$, 则以 $\langle A; B\rangle$ 记所有满足 $f(A)\subset B$ 的连续函数 $f: X\to Y$ 的集合. 以 Y^X 记从 X 到 Y 的所有连续函数组成的空间, 其拓扑由子基 $\{\langle K; U\rangle\}$ 生成, 这里 K 是 X 的紧致子集, U 是 Y 的开子集. 这个拓扑叫作紧致开拓扑. 若 $A\subset X$ 及 $B\subset Y$, 我们用 $(Y, B)^{(X,A)}$ 记 Y^X 的子空间, 由所有满足 $f(A)\subset B$ 的连续函数组成. 记 $E: Y^X\times X\to Y$ 为赋值映射, 由 $E(f, x)=f(x)$ 定义. 给定函数 $g: Z\to Y^X$, 则合成映射

$$Z\times X \xrightarrow{g\times 1} Y^X\times X \xrightarrow{E} Y$$

是从 $Z\times X$ 到 Y 的一个函数。

8. 指数对应定理 若 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，Y 和 Z 是拓扑空间，则一映射 $g: Z\to Y^X$ 是连续的，当且仅当 $E\circ(g\times 1): Z\times X\to Y$ 是连续的。

9. 指数法则 若 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，Y 是拓扑空间，则由 $\psi(g)=E\circ(g\times 1)$ 定义的函数 $\psi: (Y^X)^Z\to Y^{Z\times X}$ 是一个同胚。

10. 若 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间，Y 是度量为 d 的度量空间，则 Y^X 可由度量 d' 作成度量空间，其中 d' 由

$$d'(f, g)=\sup\{d(f(x), g(x))\,|\,x\in X\}$$

定义。

§3 群 论

一个同态若分别是单映，满映，双映，则分别称为单同态，满同态，同构。若 $\{G_j\}_{j\in J}$ 是带指标的群族，则其直积为一个群，在笛卡儿积 $\times G_j$ 上，由 $(g_j)(g_j')=(g_jg_j')$ 定义群的构造。若 $\{G_\alpha\}$ 是群的一个逆向体系（即对每个 α，G_α 是个群，且 $f_\alpha^\beta: G_\beta\to G_\alpha$ 是同态，$\alpha\leqslant\beta$），其逆向极限（做为集合的逆向极限）$\lim_{\leftarrow}\{G_\alpha\}$ 是 $\times G_\alpha$ 的一个子群。

设 A 是群 G 的子集。G 叫做由 A 自由生成的，且 A 叫做 G 的自由生成集或 G 的自由基，如果给定任意函数 $f: A\to H$，其中 H 为一群，则存在唯一同态 $\varphi: G\to H$ 是 f 的一个扩充。一个群称为自由的，若它是由某子集所自由生成的。对任意集合 A，由 A 生成的自由群是一个群 $F(A)$，它包含 A 做为其自由生成集。这样的群 $F(A)$ 存在，且任意两个是典型同构的。

1. 任一群同构于一自由群的商群。

群 G 的一个显示由生成元集合 A，关系集合 $B\subset F(A)$，以及函数 $f: A\to G$ 组成，且要求其扩充所成的同态 $\varphi: F(A)\to G$ 是

个满同态，其核是$F(A)$的由B生成的正规子群. 若A和B是两个有限集合，则此显示称为有限的，且G称作是有限显示的.

§4 模[*)][**)]

我们主要有兴趣的R模是R为主理想环的. 不过，我们将从R模的某些性质入手，其中R是个带单位的交换环，此单位作用在每个所考虑的模上是恒同的. 若φ: $A\to B$是R模的同态，则有R模

$$\ker\varphi=\{a\in A\mid\varphi(a)=0\}\subset A$$

$$\operatorname{im}\varphi=\{b\in B\mid b=\varphi(a),\ \text{对某些 } a\in A\}\subset B$$

$$\operatorname{coker}\varphi=B/\operatorname{im}\varphi.$$

1. Noether 同构定理 设A和B是模C的子模，且设$A+B$是C中由$A\cup B$生成的子模. 包含映射$A\subset A+B$变$A\cap B$到B内，且诱导$A/(A\cap B)$同构于$(A+B)/B$.

若$\{A_j\}_{j\in J}$是带指标的R模族，则其直积$\times A_j$是个R模，且其直和$\oplus A_j$也是一个R模($\oplus A_j$是$\times A_j$的子模，由仅有有限个坐标非0的元素组成). R模(以及同态f_α^β: $A_\beta\to A_\alpha$, $\alpha\leqslant\beta$)的逆向体系$\{A_\alpha\}$的逆向极限$\lim_{\leftarrow}\{A_\alpha\}$是个$R$模；$R$模(及同态)的顺向体系的顺向极限也是$R$模.

2. 任一R模同构于其有限生成的子模(及其包含映射)的顺向体系的顺向极限.

若A和B是R模，其张量积$A\otimes B$ (亦写作$A\underset{R}{\otimes}B$) 是个R模. 对于$a\in A$和$b\in B$, 存在一个对应的元素$a\otimes b\in A\otimes B$. $A\otimes B$由元素$\{a\otimes b\mid a\in A,\ b\in B\}$生成，且对于$a$, $a'\in A$,

---

*) 作为一般参考书，可看 H. Cartan 和 S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, N. J., 1956 及 S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1963. ——原注

**) 本节内容仅应用于第3章以后，作为只阅读这个节译本的读者，可略去不读. ——译注

b, $b'\in B$, r, $r'\in R$, 有关系

$$(ra+r'a')\otimes b=r(a\otimes b)+r'(a'\otimes b),$$
$$a\otimes(rb+r'b')=r(a\otimes b)+r'(a\otimes b')$$

成立。

在 A 或 B 又是 R' 模的情况下，$A\underset{R}{\otimes}B$ 也是 R' 模。

3. 对任一 R 模 A，由 $a\to a\otimes 1$ 和 $a\to 1\otimes a$ 定义的两个同态，是 A 到 $A\otimes R$ 和 $R\otimes A$ 的两个同构。

4. 对于 R 模 A 和 B，存在 $A\otimes B$ 到 $B\otimes A$ 的同构，将 $a\otimes b$ 变为 $b\otimes a$。

5. 若 A 和 B 是 R 模，B 和 C 是 R' 模，则存在 $(A\underset{R}{\otimes}B)\underset{R'}{\otimes}C$ 到 $A\underset{R}{\otimes}(B\underset{R'}{\otimes}C)$ 的同构，变 $(a\otimes b)\otimes c$ 为 $a\otimes(b\otimes c)$（两者皆被视为既是 R 模又是 R' 模）。

若 A 和 B 是 R 模，其同态模 $\mathrm{Hom}(A,B)$ [也写为 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$] 是以 R 同态 $A\to B$ 为元素的 R 模。在 A 或 B 也是 R' 模的情况下，$\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 也是个 R' 模。

6. 若 A 和 B 是 R 模，B 和 C 是 R' 模，则存在 $\mathrm{Hom}_{R'}(A\underset{R}{\otimes}B, C)$ 到 $\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{R'}(B, C))$ 的同构（两者皆既视为 R 模又视为 R' 模），将 R' 同态 φ: $A\underset{R}{\otimes}B\to C$ 变为 R 同态

$$\varphi':\ A\to \mathrm{Hom}_{R'}(B, C),$$

由 $\varphi'(a)(b)=\varphi(a\otimes b)$ 给出（$a\in A$, $b\in B$）。

R 模 A 的子集 S 称为 A 的基（且 A 称为由 S 自由生成的），如果任意函数 f: $S\to B$, 其中 B 是一 R 模，容许唯一地扩充为同态 φ: $A\to B$. 若一模有基，则称它为自由模．对于任一集合 S，由 S 生成的自由模记为 $F_R(S)$，是从 S 到 R 的所有有限非 0 函数的模（其加法和数乘以显然的方式定义），且将 $s\in S$ 等同于其特征函数．$F_R(S)$ 包含 S 作为其基，且任意以 S 为基的模典型地同构于 $F_R(S)$。

7. 任一 R 模同构于一自由 R 模之商。

8 若 A' 是 A 的子模，A/A' 自由，则 A 同构于直和 $A'\oplus(A/A')$.

以下我们假设 R 是主理想环(亦即它是个整环，其中每个理想都是主理想)。若 A 是个 R 模，其挠子模 Tor A 定义为

$$\text{Tor } A=\{a\in A \mid ra=0, \text{ 对某非 } 0 \text{ 的 } r\in R\}.$$

A 称为挠自由的或无挠的，若 Tor $A=0$.

9. 在主理想环上一个自由模的子模是自由的.

10. 在主理想环上一个有限生成的模，它是自由的当且仅当它是挠自由的.

11. 在主理想环上，$A/\text{Tor } A$ 是挠自由的.

若 A 是在主理想环 R 上的有限生成的模，其秩 $\rho(A)$ 定义为商模 $A/\text{Tor } A$ 的基元素的个数.

12. 若 A' 是主理想环上有限生成模 A 的子模，则

$$\rho(A)=\rho(A')+\rho(A/A').$$

设 $\varphi: A\to A$ 是主理想环上有限生成模 A 的自同态. φ 的迹 $\text{Tr }\varphi$ 是 R 的元素，它是 φ 在自由模 $A/\text{Tor } A$ 中诱导的自同态 φ' 的迹[亦即：若 $A/\text{Tor } A$ 有基 $a_1, \cdots, a_n$，则 $\varphi'(a_i)=\sum r_{ij}a_j$，且 $\text{Tr }\varphi=\sum r_{ii}$].

13. 设 φ 是有限生成模 A 的自同态，且设 A' 是 A 的子模，使 $\varphi(A')\subset A'$. 则 $\varphi|A'$ 是 A' 的自同态，且存在诱导出的 A/A' 的自同态 φ''. 它们的迹满足关系

$$\text{Tr }\varphi=\text{Tr}(\varphi|A')-\text{Tr }\varphi''.$$

具有单个生成元的模称作循环的. 在主理想环 R 上这样的模 A 由元素 $r_A\in R$ 在同构的意义下所示性，其中 r_A 生成一个理想，由所有把 A 中每个元素都零化的元素所组成(r_A 在乘以 R 的可逆元素的意义下是唯一的).

14. 有限生成模的构造定理 在主理想环 R 上，每一个有限生成模是自由模 $A_1, \cdots, A_q$ 的直和，它们分别对应元素 $r_1, \cdots, r_q\in R$，具有下述性质：r_i 可以整除 r_{i+1} $(1\leqslant i\leqslant q-1^{*})$. 元素

*) 原书为 $1\leqslant i\leqslant q$ 实应为 $1\leqslant i\leqslant q-1$. ——译注

$r_1, \cdots, r_q$ 在乘以 R 的可逆元素的意义下是唯一的，且与这个模的秩一起在同构的意义下示性此模*).

§5 欧氏空间

本书中使用下列确定了意义的符号：

$\emptyset$ = 空集

$\boldsymbol{Z}$ = 整数环

$\boldsymbol{Z}_m$ = 整数 mod m 环

$\boldsymbol{R}$ = 实数域

$\boldsymbol{C}$ = 复数域

$\boldsymbol{Q}$ = 四元数除环

$\boldsymbol{R}^n$ = n 维欧氏空间，$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$，$\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$

O = $\boldsymbol{R}^n$ 的原点

I = 单位闭线截

$\dot{I} = \{0, 1\} \subset I$

I^n = n 维立方体 $= \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1$, 对 $1 \leqslant i \leqslant n\}$

$\dot{I}^n = \{x \in I^n$, 对某 i, $x_i = 0$ 或 $x_i = 1\}$

E^n = n 维实心球 $= \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

S^{n-1} = $(n-1)$ 维球 $= \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

P^n = n 维射影空间 = 把 S^n 上的每个 x 与 $-x$ 叠合后得到的商空间

若 x 和 y 是一实向量空间的点，联接它们的闭线段记为 $[x, y]$，是点集 $\{tx+(1-t)y \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$（于是 $I=[0, 1]$）. 若 $x \neq y$，它们所决定的直线是点集 $\{tx+(1-t)y \mid t \in \boldsymbol{R}\}$. 实向量空间的一个子集 C 叫做仿射流形，若对 x、$y \in C$ 且 $x \neq y$，它们决定

---

*) 本书中多次出现"在同构的意义下是唯一的"，意思是说，若有两个皆满足条件，它们是同构的．"在同构的意义下"，"在乘以可逆元素的意义下"等，皆如此理解．"在同构的意义下示性此模"意味着在允许相差一个同构的前提下，互相唯一决定．——译注

的直线也包含在C中．一子集C称为凸的，若$x, y\in C$蕴涵$[x, y]\subset C$．$\boldsymbol{R}^n$的凸体是$\boldsymbol{R}^n$的一凸子集，包含$\boldsymbol{R}^n$的某个非空开子集(于是，I^n和E^n是$\boldsymbol{R}^n$的凸体)．

1. 若C是$\boldsymbol{R}^n$的凸体，而C'是$\boldsymbol{R}^m$的凸体，则$C\times C'$是$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m=R^{n+m}$的凸体．

2. $\boldsymbol{R}^n$的任意两个紧致凸体同胚．

实向量空间的子集S称为仿射无关的，若任给有限个不同的元素$x_0, x_1, \cdots, x_m\in S$及$t_0, t_1, \cdots, t_m\in R$使$\sum t_i=0$, $\sum t_ix_i=0$，则对$0\leqslant i\leqslant m$有$t_i=0$（这等价于条件：$x_1-x_0, x_2-x_0, \cdots, x_m-x_0$线性无关）．

3. 在$\boldsymbol{R}^n$中存在由$n+1$个点组成的仿射无关的子集，但多于$n+1$个点的仿射无关的子集不存在．

4. 给定点$x_0, x_1, \cdots, x_m\in\boldsymbol{R}^n$，由它们生成的凸集是子集$\{\sum t_ix_i|0\leqslant t_i\leqslant 1, \sum t_i=1\}$．集合$\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$是仿射无关的，当且仅当在由它们生成的凸集中，每点$x$都有唯一的表达式$x=\sum t_ix_i(0\leqslant t_i\leqslant 1,\ 0\leqslant i\leqslant m)$及$\sum t_i=1$．

关于代数拓扑学的其它书籍

Alexandroff, P.; H. Hopf: *Topologie*, Springer-Verlag OHG, Berlin, 1935.

Bourgin, D. G.: *Modern Algebraic Topology*, The Macmillan Company, New York, 1963.

Cairns, S. S.: *Introductory Topology*, The Ronald Press Company, New York, 1962

Eilenberg, S.; N. E. Steenrod: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1952.

Godement, R.: *Topologie algébrique et theorie des faisceaux*, Hermann & Cie, Paris, 1958.

Hilton, P. J.; S. Wylie: *Homology Theory*, Cambridge University Press, London, 1960.

Hocking, J. G.; G. S. Young: *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.

Hu, S. T.: *Homotopy Theory*, Academic Press, Inc., New York, 1959.

Lefschetz, S.: *Algebraic Topology* American Mathematical Society Colloquium Series, Vol. 27, New York, 1942.

Lefschetz, S.: *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

Pontryagin, L. S.: *Foundations of Combinatorial Topology*, Graylock Press, Rochester, N. Y., 1952 *)

Schubert, H.: *Topologie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1964.

Seifert, H.; W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teuber Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1934 **)

Steenrod, N. E.: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

Wallace, A. H.: *An Introduction to Algebraic Topology*, Pergamon Press, London, 1957.

Wilder, R. L.: *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Series, Vol. 32, New York, 1949.

关于代数拓扑和一般拓扑国内出版的书: ***)

江泽涵:《拓扑学引论》, 上海科学技术出版社, 1978.

廖山涛, 刘旺金:《同伦论基础》, 北京大学出版社 1980.

Armstrong, M. A.:《基础拓扑学》, 孙以丰译, 北京大学出版社, 1983.

王成堂, 戴锦生, 王尚志:《点集拓扑学原理》陕西科学技术出版社, 1985.

熊金城:《点集拓扑讲义》, 人民教育出版社, 1981.

李元熹、张国樑:《拓扑学》, 上海科学技术出版社, 1986.

---

*) 中译本《组合拓扑学基础》, 冯康译. ——译注

**) 中译本《拓扑学》, 江泽涵译, 人民教育出版社, 1981 ——译注

***) 系译者推荐的书, 原书上没有. ——译注

第1章　同伦和基本群

拓扑学是研究拓扑空间和它们之间的连续函数的. 一个标准的问题是这些空间和函数的同胚分类. 一个基于连续形变的较弱的等价关系导致另一个分类问题. 这后一个分类问题在代数拓扑学中有着基本的重要性,因为对于它,用得上的工具看来是最成功的.

作为一个对我们的目的来说可以进行工作的定义, 代数拓扑学可视为用代数的对象——如群、环、同态来研究拓扑空间和连续函数的. 从拓扑到代数的联系是称作函子的变换. 为此理由, §1.1 和§1.2 致力于范畴和函子的基本概念.

在§1.3 和§1.4 中引入了连续形变的概念,技术上理解为同伦的概念. 然后定义同伦范畴和在此范畴上的某些函子, 这一切对于主题都是重要的. §1.5 和§1.6 致力于研究使同伦范畴上的函子取值于群范畴的条件. 作为例子,简单地提到同伦群函子.

在§1.7 和§1.8 中引入和讨论的是第一个被详细考虑的函子, 即基本群函子. 这是一个在代数拓扑学中具有直观感染力的这种函子的例子. 章末的习题中提出了此函子的一些应用. 在第二章中应用此函子于複叠空间的系统研究和分类.

§1　范　　畴

拓扑的代数表示就是从拓扑到代数的变换. 这样的表示变一个拓扑问题为一个代数问题, 终结于有足够多的表示使得一个拓扑问题可解,当(或仅当)其所有对应的代数问题皆可解.

表示的定义形式上被称作函子, 将于下节中给出. 本节则致

力于范畴的概念，因为函子是从一个或几个范畴到另一个范畴的带有某些自然性质的函数.

一个范畴可以直观地想像为由集合或许带有附加构造的集合以及或许保持附加构造的函数所组成. 更确切地说，一个范畴 $\mathscr{C}$ 由下列内容组成:

(a) 一类对象.

(b) 对每个由对象 X 和 Y 构成的有序偶，一个态集合 $\hom(X, Y)$，以 X 为定义域，Y 为值域; 若 $f \in \hom(X, Y)$，我们写作 $f: X \to Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$.

(c) 对于由对象 X, Y 和 Z 构成的每个有序三重组，一个函数，把一对态 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 对应于另一个叫做它们的合成的态 $gf = g \circ f: X \to Z$.

这些满足下列两公理:

结合律: 若 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 和 $h: Z \to W$,

则
$$h(gf) = (hg)f: X \to W.$$

存在单位态: 对每个对象 Y 存在态 $1_Y: Y \to Y$，使若 $f: X \to Y$，则 $1_Y f = f$; 若 $h: Y \to Z$，则 $h 1_Y = h$.

若对象的类是个集合，这范畴叫做小的. 对我们的大多数目的来说，我们不妨限制注意力于小的范畴，但在得到一个范畴之前，就不得不限定对象的集合，毕竟是不方便的. 例如，我们喜欢考虑其对象是集合或群的范畴，但我们宁愿考虑所有集合或群的类，而不是在这两例中考虑集合或群的一些适当的集合.

从两公理可以推出，1_Y 是唯一的(见下面的引理 1)，称之为 Y 的单位态. 给定态 $f: X \to Y$ 及 $g: Y \to X$，使 $gf = 1_X$，g 称为 f 的左逆; f 称为 g 的右逆. 一个态既是 f 的左逆又是 f 的右逆，称为 f 的双边逆，或简称为逆. 态 $f: X \to Y$ 称为等价，记作 $f: X \approx Y$，若另有态 $g: Y \to X$ 为 f 的双边逆. 若 $g': Y \to X$ 是 f 的左逆，$g'': Y \to X$ 是 f 的右逆，则

$$g' = g' 1_Y = g'(fg'') = (g'f)g'' = 1_X g'' = g'',$$

这说明 $g'=g''$. 从而有下述引理:

1 引理 *若 f: $X\to Y$ 有一左逆和一右逆, 则二者相等, 且 f 是一个等价.* ∎

特别地, 等价 f: $X\approx Y$ 有唯一的逆, 记为 f^{-1}: $Y\to X$, 且 f^{-1} 也是等价. 若有一个等价 f: $X\approx Y$, 则 X 和 Y 称为等价的, 记 $X\approx Y$. 因为易见等价的合成是等价, 故关系 $\approx$ 是 $\mathscr{C}$ 的对象的任一集合中的等价关系.

下面列举范畴的一些例子:

2 集合和函数的范畴[亦即: 对象类是全体集合的类, 且对集合 X 和 Y, $\hom(X, Y)$ 等于从 X 到 Y 的函数的集合].

3. 拓扑空间和连续映射的范畴.

4. 群和同态的范畴.

5. R 模和同态的范畴.

6. (在 R 上的)赋范环和连续同态的范畴.

7. 集合和单映(或满映, 或双映)的范畴.

8. 点标集(点标集是非空的且带有一区别出的元素的集合)和保持所区别元素的函数的范畴.

9. 点标拓扑空间(点标拓扑空间是非空的且带有一基点的拓扑空间)和保基点的连续映射的范畴.

10. 有限集合和函数的范畴.

11. 给定 X 中的一个偏序, 则有一个范畴, 其对象为 X 的元素, 且使 $\hom(x, x')$ 只包含单个有序偶 (x, x') 或为空集, 依 $x\leqslant x'$ 或 $x\not\leqslant x'$ 而定.

12. 群及其同态的共轭类的范畴(亦即: 一个态 $G\to G'$ 是从 G 到 G' 的同态的一个等价类, 两同态是等价的, 若它们差一个 G' 的内自同构).

子范畴 $\mathscr{C}'\subset\mathscr{C}$ 是个范畴, 使得

(a) $\mathscr{C}'$ 的对象也是 $\mathscr{C}$ 的对象;

(b) 对于 $\mathscr{C}'$ 的对象 X' 和 Y',

$$\hom_{\mathscr{C}'}(X', Y')\subset\hom_{\mathscr{C}}(X', Y');$$

(c) 若 f': $X'\to Y'$ 和 g': $Y'\to Z'$ 是 $\mathscr{C}'$ 的态，它们在 $\mathscr{C}'$ 中的合成等于在 $\mathscr{C}$ 中的合成.

$\mathscr{C}'$ 称为 $\mathscr{C}$ 的满子范畴，若 $\mathscr{C}'$ 是 $\mathscr{C}$ 的子范畴，且对 $\mathscr{C}'$ 的对象 X' 和 Y', $\hom_{\mathscr{C}'}(X', Y') = \hom_{\mathscr{C}}(X', Y')$. 上述例 7 的范畴是例 2 的范畴的子范畴，例 10 的范畴是例 2 的范畴的满子范畴. 例 3, 4, 5, 6 和 8 的范畴不是集合的范畴的子范畴，因为这些范畴的对象都是有附加构造的集合(所以这些范畴的不同对象可以基于相同的集合). 在例 11 和 12 中，每个的范畴的态不是函数，于是，这些范畴没有一个是集合范畴的子范畴.

一个这样的方形图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

称为可交换的，若其中始于同一位置且终于同一位置的态的两个合成相等，即当且仅当 $hf = f'g$.

下面是联系于一个给定范畴的某些范畴的描述. 给定一个范畴 $\mathscr{C}$, 存在与其联系的一个范畴称为 $\mathscr{C}$ 的态范畴. 其对象为 $\mathscr{C}$ 的态 $X \xrightarrow{f} Y$, 其定义域为 $X \xrightarrow{f} Y$, 值域为 $X' \xrightarrow{f'} Y'$ 的态是态偶 g: $X\to X'$ 和 h: $Y\to Y'$, 使方形图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

可交换. 我们可以用类似的方法以 $\mathscr{C}$ 的态的图表为对象得到比以 $\mathscr{C}$ 的态为对象的与 $\mathscr{C}$ 联系的更一般的适当的范畴.

设 $\mathscr{C}$ 是范畴，其对象是带有附加构造的集合(例如有区别出的元素或有个拓扑)，其态是保持附加构造的函数. 例如，$\mathscr{C}$ 可以是例 2 到例 10 中的任何一个. 存在与 $\mathscr{C}$ 联系的范畴，称为 $\mathscr{C}$ 的偶范畴，其对象是单映态 i: $A\to X$ (因在这样的范畴中每个态都

是函数，考虑这些单映是有意义的)；其态是交换的方形图表：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ g\downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

这样，$\mathscr{C}$ 的偶范畴是 $\mathscr{C}$ 的态范畴的满子范畴．记号(X, A)表示由 X 和 i: $A\subset X$ 组成的偶，记号f: $(X, A)\to(Y, B)$意味着f: $X\to Y$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个态，使$f(i(A))=j(B)$．所以，$\mathscr{C}$ 的偶范畴以(X, A)为对象，以f: $(X, A)\to(Y, B)$为态．

若 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 为范畴，其积 $\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2$ 是个范畴，它的对象为有序偶(Y_1, Y_2)，Y_1 是 $\mathscr{C}_1$ 的对象，Y_2 是 $\mathscr{C}_2$ 的对象；其态$(X_1, X_2)\to(Y_1, Y_2)$是态的有序偶(f_1, f_2)，其中，f_1: $X_1\to Y_1$ 在 $\mathscr{C}_1$ 中，f_2: $X_2\to Y_2$ 在 $\mathscr{C}_2$ 中．类似地，任意一族带指标的范畴的积也可给出．

给定一个范畴 $\mathscr{C}$，存在一个对立范畴 $\mathscr{C}^*$，其对象Y^*与 $\mathscr{C}$ 的对象 Y 一一对应*)，其态f^*: $Y^*\to X^*$ 与态f: $X\to Y$ 一一对应$[f^*g^*$ 定义为 $(gf)^*$，对 $\mathscr{C}$ 中的 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z]$．我们将$(\mathscr{C}^*)^*$与 $\mathscr{C}$ 等同起来，使$(X^*)^*=X$ 及$(f^*)^*=f$．

其次来说明如何解释和与积，以及在任意范畴内的顺向与逆向极限．范畴 $\mathscr{C}$ 的对象 X 称为初始对象，若对 $\mathscr{C}$ 的每个对象 Y，集合 $\hom(X, Y)$ 恰包含一个元素．对偶地，$\mathscr{C}$ 的对象 Z 称为终止对象，若对 $\mathscr{C}$ 的每个对象 Y，集合 $\hom(Y, Z)$ 恰包含一个元素．注意到，$\mathscr{C}$ 的任意两个初始对象等价；任意两个终止对象也等价．在例 2 和 3 中，空集是初始对象，任一单点集合或单点拓扑空间是终止对象．在例 4 中，平凡群是初始对象，又是终止对象．在例 7 中，集合和双映的范畴既无初始对象，也无终止对象．

设 $\{Y_j\}_{j\in J}$ 是范畴 $\mathscr{C}$ 的带指标的对象族．设 $\mathscr{S}\{Y_j\}$ 是一个

---

*) 本书的一一对应，是指两个集合之间的一个双映．但此处的 Y^* 与 Y 一一对应，应理解为有一个 Y 便有一个 Y^* 与之对应，反之，有一个 Y^* 便有一个 Y 与之对应，而不能理解为 Y 与 Y^* 是有一一对应的两个集合．——译注

范畴，其对象是 $\mathscr{C}$ 的带指标的态族 $\{f_j\}_{j\in J}$，每个对象之中的诸态有共同的值域；此范畴中从对象 $\{f_j: Y_j\to Z\}$ 到对象 $\{f'_j: Y_j\to Z'\}$ 的态，是 $\mathscr{C}$ 的态 $g: Z\to Z'$ 满足 $gf_j=f'_j$ $(j\in J)$. $\mathscr{S}\{Y_j\}$ 的一个初始对象称为族 $\{Y_j\}$ 的和. 在 $\mathscr{C}$ 中一个给定的族可能有和，也可能没有和. 集合和是集合范畴中的和，拓扑和是拓扑空间的范畴中的和，直和是 R 模的范畴中的和. 在有限集的范畴中，一般地说，仅有有限族有和. 类似地，在有限生成 R 模的范畴中，一般地说，仅有有限族有和.

对偶地，在 $\mathscr{C}$ 中给定带指标的对象族$\{Y_j\}_{j\in J}$. 设 $\mathscr{P}\{Y_j\}$ 是一个范畴，其对象是 $\mathscr{C}$ 的具有相同定义域的带指标的态族 $\{g_j\}_{j\in J}$，从对象 $\{g_j: X\to Y_j\}$ 到对象 $\{g'_j: X'\to Y_j\}$ 的态，是 $\mathscr{C}$ 中的态 $f: X\to X'$ 满足 $g'_jf=g_j$ 对任意 $j\in J$. $\mathscr{P}\{Y_j\}$ 的一个终止对象称作族 $\{Y_j\}$ 的积. 集合的笛卡儿积是集合范畴中的积，拓扑积是拓扑空间的范畴中的积，直接积是群或 R 模范畴中的积. 在有限集合(或有限生成的 R 模)的范畴中，一般地说，仅有有限族有积.

范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个顺向体系 $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ 包括带指标的一个对象族 $\{Y^\alpha\}$，指标取于一个顺向集 $\Lambda=\{\alpha\}$，以及 $\mathscr{C}$ 中的态族 $\{f^\beta_\alpha: Y^\alpha\to Y^\beta\}$ (对 $\alpha\leqslant\beta$)，它们满足：

(a) $f^\alpha_\alpha=1_{Y^\alpha}$ (对 $\alpha\in\Lambda$)；

(b) $f^\gamma_\alpha=f^\gamma_\beta f^\beta_\alpha: Y^\alpha\to Y^\gamma$ (对 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$)在 Λ 中.

于是有一个范畴 $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$，其对象为带指标的态族 $\{g_\alpha: Y^\alpha\to Z\}_{\alpha\in\Lambda}$，使得 $g_\alpha=g_\beta f^\beta_\alpha$，若在 Λ 中 $\alpha\leqslant\beta$，它的以对象$\{g_\alpha: Y^\alpha\to Z\}$ 为定义域、以对象 $\{g'_\alpha: Y^\alpha\to Z'\}$ 为值域的态，是 $\mathscr{C}$ 的态 $h: Z\to Z'$，使 $hg_\alpha=g'_\alpha$，$\alpha\in\Lambda$. $\operatorname{dir}\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ 的一个初始对象称为顺向体系 $\{Y^\alpha, f^\beta_\alpha\}$ 的一个顺向极限. 集合、拓扑空间、群和 R 模的顺向极限，就是它们各自的范畴中的顺向极限，可当做范畴中顺向极限的几个例子.

对偶地，$\mathscr{C}$ 中的一个逆向体系 $\{Y_\alpha, f^\beta_\alpha\}$ 包括取指标于顺向集 $\Lambda=\{\alpha\}$ 的对象族 $\{Y_\alpha\}$，及一个 $\mathscr{C}$ 中的态族 $\{f^\beta_\alpha: Y_\beta\to Y_\alpha\}$ ($\alpha\leqslant\beta\in\Lambda$)，满足：

(a) $f_\alpha^\alpha = 1_{Y_\alpha}$ (对$\alpha\in\Lambda$);

(b) $f_\alpha^\gamma = f_\alpha^\beta f_\beta^\gamma: Y_\gamma\to Y_\alpha$ (对 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ 在 Λ 中).

于是有一范畴 $\mathrm{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$, 其对象为带指标的态族 $\{g_\alpha: X\to Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得 $g_\alpha = f_\alpha^\beta g_\beta$, 若 $\alpha\leqslant\beta$ 在 Λ 中; 其以对象 $\{g_\alpha: X\to Y_\alpha\}$ 为定义域, 以对象 $\{g'_\alpha: X'\to Y_\alpha\}$ 为值域的态是 $\mathscr{C}$ 的态 $h: X\to X'$, 使 $g'_\alpha h = g_\alpha$ $(\alpha\in\Lambda)$. $\mathrm{inv}\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的一个终止对象称为逆向体系 $\{Y_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ 的一个*逆向极限*. 集合、拓扑空间、群和 R 模的逆向极限是在它们各自的范畴中的逆向极限,成为逆向极限的例子.

类似的考虑可以在范畴 $\mathscr{C}$ 中定义任一带指标的对象族及这些对象之间的带指标的态族的顺向和逆向极限. 细节从略.

§2 函　　子

我们对范畴的主要兴趣在于从一范畴到另一个的映射[*]. 具有保持单位和合成的自然性的那些映射叫做*函子*. 本节致力于一个或多个变元的函子的定义,一些例子和应用,以及定义在函子之间的自然变换.

设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是范畴. 一个从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的*协变函子*(或*反变函子*)由一个对象函数和一个态函数组成, 对象函数把 $\mathscr{C}$ 的每一个对象 X 变到 $\mathscr{D}$ 的对象 $T(X)$, 态函数把 $\mathscr{C}$ 的每一个态 $f: X\to Y$ 变到 $\mathscr{D}$ 的一个态

$$T(f): T(X)\to T(Y)\ [\text{或}\ T(f): T(Y)\to T(X)],$$

使得下列二条成立:

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

(b) $T(gf) = T(g)T(f)$ [或 $T(gf) = T(f)T(g)$].

下面列举函子的一些例子:

1. 从拓扑空间和连续映射的范畴到集合和函数的范畴的一个协变函子将任一拓扑空间变到其所基于的集合. 此函子称为*可遗函子*,因为它"遗忘"了空间的拓扑结构.

[*] 这里的映射和下段中的函数,不代表其原义,只理解为单值的对应. ——译注

2. 从集合与函数的范畴到 R 模与同态的范畴的一个协变函子将任一集合变到由它生成的自由 R 模.

3. 给定一个确定的 R 模 M_0, 有一个从 R 模和同态的范畴到自身的协变(或反变)函子, 变 R 模 M 为 R 模 $\mathrm{Hom}_R(M_0, M)$ [或 $\mathrm{Hom}_R(M, M_0)$].

4. 对任一范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}$ 中的对象 Y, 有一个从 $\mathscr{C}$ 到集合与函数的范畴的协变(或反变)函子 π_Y(或 π^Y), 将 $\mathscr{C}$ 的对象 Z (或 X) 变到集合 $\pi_Y(Z)=\hom(Y, Z)$ [或 $\pi^Y(X)=\hom(X, Y)$], 并将态 $h: Z\to Z'$ [或 $f: X\to X'$] 变到函数

$$h_{\#}=\pi_Y(h): \hom(Y, Z)\to\hom(Y, Z')$$

$$[\text{或 } f^{\#}=\pi^Y(f): \hom(X', Y)\to\hom(X, Y)],$$

由 $h_{\#}(g)=h\circ g$ 对 $g: Y\to Z$ [或 $f^{\#}(g')=g'\circ f$ 对 $g': X'\to Y$] 所定义.

5. 从紧致 Hausdorff 空间和连续映射的范畴到 $\boldsymbol{R}$ 上的赋范环和连续同态的范畴的反变函子 C, 把 X 变到其上连续实值函数的赋范环.

6. 从拓扑空间和连续映射的范畴到交换群和同态的范畴的一个协变函子 H_0, 使 $H_0(X)$ 是由 X 的分支组成的集合生成的交换群, 并且若 $f: X\to Y$ 是连续映射, 令

$$H_0(f): H_0(X)\to H_0(Y)$$

是这样的同态: 若 C 是 X 的一个分支, C' 是 Y 的包含 $f(C)$ 的分支, 则 $H_0(f)C = C'$[*].

7. 在范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个顺向体系(或逆向体系)是从(依例 1.1.11 所定义的)顺向集的范畴到 $\mathscr{C}$ 的协变(或反变)函子.

8. 对任意范畴 $\mathscr{C}$, 有一个到其对立范畴 $\mathscr{C}^*$ 的反变函子, 变 $\mathscr{C}$ 的对象 X 为 $\mathscr{C}^*$ 的对象 X^*, 变 $\mathscr{C}$ 的态 $f: X\to Y$ 为 $\mathscr{C}^*$ 的态 $f^*: Y^*\to X^*$.

---

* 通常, H_0 表示 0 维奇异同调函子, 则 $H_0(X)$ 为 X 的道路分支集合生成的自由交换群. ——译注

注意：在$\mathscr{C}$上的任一反变函子对应于在$\mathscr{C}^*$上的一个协变函子，反之亦然．所以任一函子可视为在某适当范畴上的协变函子．尽管如此，我们在以下可看出，在考虑$\mathscr{C}$上协变函子的同时也考虑反变函子，要比在两个范畴上仅考虑协变函子更方便．

任意一个从拓扑空间和连续映射的范畴到一个代数范畴（例如交换群和同态的范畴）的函子是对拓扑范畴的用代数范畴的表示．代数拓扑学就是研究这类函子的；下面来说明怎样利用函子来得到拓扑问题可解性的必要条件．

9．定理 *设T是从范畴$\mathscr{C}$到范畴$\mathscr{D}$的函子．则T把$\mathscr{C}$中的等价变到$\mathscr{D}$中的等价．*

证明 设T是协变函子（若T是反变函子，则可以类似地论证）．设$f: X\to Y$是$\mathscr{C}$中的等价，则$f^{-1}f=1_X$．故

$$1_{T(X)}=T(1_X)=T(f^{-1})T(f).$$

类似地，$T(f)T(f^{-1})=1_{T(Y)}$．所以$T(f^{-1})$是$T(f)$的双边逆，从而$T(f)$是$\mathscr{D}$中的等价．∎

特别地，若T是拓扑空间和连续映射范畴上的代数函子，则X同胚于Y的必要条件是：$T(X)$等价于$T(Y)$．这样，例6中的函子H_0说明实直线$\boldsymbol{R}$与实平面$\boldsymbol{R}^2$不同胚．[假设其同胚，则$\boldsymbol{R}-0$将同胚于$\boldsymbol{R}^2-p$，对某$p\in\boldsymbol{R}^2$，但$H_0(\boldsymbol{R}-0)$为两个生成元上的自由交换群，而$H_0(\boldsymbol{R}^2-p)$是一个生成元上的自由交换群.] 这是个平凡的例子．然而，在第四章中将要推广H_0，而定义的同调函子H_q可以通过同样方式用来证明$\boldsymbol{R}^n$和$\boldsymbol{R}^m$在$n\neq m$时不同胚．

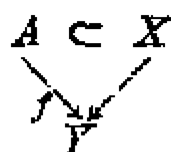
在应用代数函子于拓扑问题时，代数时常扮演重要的角色．例如，设T_0是由合成函子H_0和可遗函子而得到的函子[*]，这可遗函子把每个交换群变到它所基于的集合．函子T_0并不比H_0包含更多的信息，不能给出同胚的更强的必要条件[例如，$T_0(\boldsymbol{R}-0)$和$T_0(\boldsymbol{R}^2-p)$是两个可数无穷集合，因之，它们在集合和函数的范

---

*) 本书未定义函子的合成，但读者可以对照函数的合成而自然得出．T_0原书作$T_0(X)$，为作者笔误．——译注

畴中是等价的]. 为此理由,提供带有尽可能多的代数构造的函子是重要的. 稍后,我们要考虑关于选定的拓扑空间的函子,这些函子取值于集合和函数的范畴,但是其中依赖于定义它们的特殊空间的某些性质是到群和同态的范畴的函子*). 在此情况下附加的代数构造将证明是有用的.

为了说明如何应用函子研究另一类问题,设 A 是拓扑空间 X 的子空间,且设 $f: A\to Y$ 是连续的. 所谓*扩充问题*,是决定 f 是否可连续扩充到 X 上,亦即:三角形图表



中的虚箭头是否对应于一个使这图表可交换的连续映射.

10. 定理 *设 T 是从拓扑空间和连续映射的范畴到范畴 $\mathscr{C}$ 的协变函子(或反变函子). 映射 $f: A\to Y$ 可扩充于 X 的必要条件是:存在态 $\varphi: T(X)\to T(Y)$ [或 φ $T(Y)\to T(X)$], 使 $\varphi\circ T(i)=T(f)$ [或 $T(f)=T(i)\circ\varphi$] (这里 $i: A\subset X$).*

证明 设 $f': X\to Y$ 是 f 的扩充, 则 $f'i=f$. 所以, $T(f')\circ T(i)=T(f)$ [或 $T(f)=T(i)\circ T(f')$]. 于是, $T(f')$ 可取为态 φ. ▌

上述结果可用于证明 $\dot{I}$ 的恒同映射不能扩充为连续映射 $I\to\dot{I}$. 我们用函子 H_0 得到必要条件:必须存在同态 φ: $H_0(I)\to H_0(\dot{I})$, 使 $\varphi\circ H_0(i)=H_0(1)$ (这里 $i: \dot{I}\subset I$). 因为 $H_0(\dot{I})$ 是两个生成元上的自由交换群, 而 $H_0(I)$ 是一个生成元上的自由交换群, 故这样的同态不存在. 这仍旧是个平凡的例子. 但它说明了一个方法,以后将定义的一般的同调函子用同样方法说明 S^n 的恒同映射不存在连续扩充 $E^{n+1}\to S^n$.

这样,我们看到,一个函子建立了拓扑问题可解性的一个必要条件. 也存在这些必要条件又是充分条件的情况. 例如,例 5 中的函子 C 给出同胚的充分必要条件——亦即:两个紧致 Hausdorff

*) 这里函子的"值"并未给出定义. 作者在写到函子涉及的一些概念时,经常借用函数的类似概念,读者可对照理解. 下边不再为此作注. ——译注

空间 X 和 Y 同胚，当且仅当 $C(X)$ 和 $C(Y)$ 同构[*]. 但这并非特别重要的结果，因为容易看出，决定两个赋范环是否同构并不比决定两个紧致 Hausdorff 空间是否同胚更容易. 我们来寻找这样的函子，它是到比拓扑空间稍简单的范畴的，要使在这些范畴中出现的代数问题能够有效地解决. 代数拓扑学的一大问题是寻找或计算足够多的这样的函子，使特殊拓扑问题的可解性等价于对应的(或说较简单的)代数问题的可解性.

我们将有机会把函子互相比较. 这是按函子间的映射的适当的定义可做到的. 设 T_1 和 T_2 是从范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 的同变函子(同为协变或同为反变). 从 T_1 到 T_2 的一个**自然变换** φ 是从 $\mathscr{C}$ 的对象到 $\mathscr{D}$ 的态的一个函数，使对 $\mathscr{C}$ 的每个态 $f: X\to Y$，下面两个图表之中适当的一个可交换:

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(Y) \\ {\scriptstyle\varphi(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(Y)} \\ T_2(X) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(Y) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} T_1(X) & \xleftarrow{T_1(f)} & T_1(Y) \\ {\scriptstyle\varphi(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi(Y)} \\ T_2(X) & \xleftarrow{T_2(f)} & T_2(Y) \end{array}$$

T_1, T_2 是协变的　　　　　　　　T_1, T_2 是反变的

若 φ 是从 T_1 到 T_2 的自然变换，使对 $\mathscr{C}$ 的每个对象 X，$\varphi(X)$ 是 $\mathscr{D}$ 的等价，则 φ 称为**自然等价**.

作为自然变换的一个例子，设 Y_1、Y_2 是范畴 $\mathscr{C}$ 的对象，且设 $g: Y_1\to Y_2$ 是 $\mathscr{C}$ 中的态. 则有一个从协变函子 π_{Y_2} 到协变函子 π_{Y_1} 的自然变换 $g^\#$，以及从反变函子 π^{Y_1} 到反变函子 π^{Y_2} 的自然变换 $g_\#$. 若 g 是 $\mathscr{C}$ 的等价，这些自然变换便都是自然等价.

这里还考虑一串变元的函子. 这样，若 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ 和 $\mathscr{D}$ 是范畴，从 $\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2$ 到 $\mathscr{D}$ 的一个协变函子称为**在每个范畴内协变的一个二元函子**. 从 $\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2^*$ 到 $\mathscr{D}$ 的协变函子，被视为从有序偶(X_1, X_2)的一个函数，其中 X_1 是 $\mathscr{C}_1$ 的对象，X_2 是 $\mathscr{C}_2$ 的对象，称为**在第一个内协变及在第二个内反变的二元函子**. 以类似的方式可以定义有混合变元的更多元的函子.

[*] 见 G. F. Simmons: *Introduction to Topology and Modern Analysis* (第 330 页定理 D) McGraw Hill Book Company, New York, 1963. ——原注

若$\mathscr{C}$是任一范畴，存在从$\mathscr{C}$到集合和函数的范畴的二元函子，在第一元为反变，在第二元为协变．这函子把$\mathscr{C}$的对象X和Y的有序偶变为集合$\hom(X, Y)$，把$\mathscr{C}$的态$f: X'\to X$和$g: Y\to Y'$的有序偶变为函数

$$f^*g_*=g_*f^*: \hom(X, Y)\to\hom(X', Y').$$

§3 同　伦

拓扑空间和连续映射在拓扑等价意义下的分类问题看来无法如§1.2所描述的那样，直接着手于可计算的代数函子．可计算的函子的大多数因为是可计算的，在连续形变下是不变的．所以它们是不能区别连续地从一个形变为另一个的空间（或映射），最多只可在连续形变意义下示性此空间（或映射）．

本节中将用同伦的概念把连续形变的直观概念精确做出．这导出同伦范畴，它对代数拓扑学是基本的．它的对象是拓扑空间，它的态是连续映射的等价类（两映射等价，如果一个能连续地形变到另一个）．为了技术上的理由，我们不固于拓扑空间的同伦范畴，而是考虑比它大的偶的同伦范畴．

一个拓扑偶(X, A)由拓扑空间X和子空间$A\subset X$组成．若A是空集，记以$\emptyset$，将不区别偶$(X, \emptyset)$与空间X．子偶$(X', A')\subset(X, A)$，由$X'\subset X$和$A'\subset A$的偶组成．偶之间的映射$f: (X, A)\to(Y, B)$是从X到Y的连续映射f，使得$f(A)\subset B$．并且如同§1.1中所述，存在一个拓扑偶和它们之间的映射的范畴，它以拓扑空间和连续映射的范畴为子范畴．点标拓扑空间和连续映射的范畴也是它的子范畴．

给定一个拓扑偶(X, A)，记偶$(X\times I, A\times I)$为$(X, A)\times I$．设$X'\subset X$，并假设$f_0, f_1: (X, A)\to(Y, B)$在$X'$上重合（即$f_0|X'=f_1|X'$）．则$f_0$相对于$X'$同伦于$f_1$，记为

$$f_0\simeq f_1 \operatorname{rel} X',$$

若有映射

$$F: (X, A)\times I\to(Y, B)$$

使 $F(x, 0)=f_0(x)$ 及 $F(x, 1)=f_1(x)$ （对 $x\in X$），且 $F(x, t)=f_0(x)$ （对 $x\in X'$ 和 $t\in I$）．这样的映射 F 称为从 f_0 到 f_1 的相对于 X' 的同伦，记 F: $f_0\simeq f_1$ rel X'．若 $X'=\emptyset$，则略去短语"相对于 $\emptyset$"．显然，$f_0\simeq f_1$ rel X' 蕴涵 $f_0\simeq f_1$ rel X''，只要 $X''\subset X'$．从 X 到 Y 的一映射称为零伦的或非基本的，若它同伦于某常值映射．

对于 $t\in I$，定义 h_t: $(X, A)\to(X, A)\times I$，由 $h_t(x)=(x, t)$．若 F: $f_0\simeq f_1$ rel X'，则 $Fh_0=f_0$，$Fh_1=f_1$，且 $Fh_t|X'=f_0|X'$（对所有 $t\in I$）．所以，$\{Fh_t\}_{t\in I}$ 是从 (X, A) 到 (Y, B) 的在 X' 上重合的映射的连续单参数族，联接 $f_0=Fh_0$ 到 $f_1=Fh_1$*)．从而 $f_0\simeq f_1$ rel X' 相当于把 f_0 连续形变到 f_1 的且在 X' 上驻定的映射的直观概念．注意：若 $f_0\simeq f_1$ rel X' 通常会有许多 F 都是从 f_0 到 f_1 的相对于 X' 的同伦（见下面例 3）．

1．例 设 $X=Y=\boldsymbol{R}^n$，定义 $f_0(x)=x$ 及 $f_1(x)=0$ （对 $x\in\boldsymbol{R}^n$）（即 $f_0=1_{R^n}$，且 f_1 为 $\boldsymbol{R}^n$ 到原点的常值映射）．若 F: $\boldsymbol{R}^n\times I\to\boldsymbol{R}^n$，由

$$F(x, t)=(1-t)x$$

所定义，则 F: $f_0\simeq f_1$ rel 0．

2．例 设 $X=Y=I$，定义 $f_0(t)=t$ 及 $f_1(t)=0$ （对 $t\in I$）．若 F: $I\times I\to I$ 由

$$F(t, t')=(1-t')t$$

所定义，则 F: $f_0\simeq f_1$ rel 0．

3．例 设 $X=Y=E^2=\{z\in\boldsymbol{C}|z=re^{i\theta}, 0\leqslant r\leqslant 1\}$，并设 $A=B=S^1=\{z\in\boldsymbol{C}|z=e^{i\theta}\}$．定义 f_0: $(E^2, S^1)\to(E^2, S^1)$ 是恒同映

---

*) 一单参数族 f_t: $(X, A)\to(Y, B)$ 对 $t\in I$ 是连续的，若 $f_t(x)$ 对 t 和 x 是联合连续的．此时，函数 $(x, t)\mapsto f_t(x)$ 是从 f_0 到 f_1 的同伦．从 I 到 $(Y, B)^{(X, A)}$ 的相应的函数也连续［此处 $(Y, B)^{(X,A)}=\{g: (X, A)\to(Y, B)\}$ 由紧致开拓扑给出拓扑］．反之，在 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间的情况下，从引言的定理 2.8 得出，对任意连续映射 φ: $I\to(Y, B)^{(X,A)}$，单参数族 $\varphi(t)$ 是连续的，且定义了从 $\varphi(0)$ 到 $\varphi(1)$ 的同伦．——原注

射，$f_1: (E^2, S^1)\to(E^2, S^1)$ 是关于原点的反射[即 $f_1(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$]．定义同伦 $F: f_0\simeq f_1 \text{ rel } 0$，由 $F(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta+t\pi)}$；另一同伦 $F': f_0\simeq f_1 \text{ rel } 0$，由 $F'(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta-t\pi)}$．

4. 例 设 X 是任一空间，Y 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸子集．设 $f_0, f_1: X\to Y$ 是两映射，在某子空间 $X'\subset X$ 上重合．则 $f_0\simeq f_1 \text{ rel } X'$．因为映射 $F: X\times I\to Y$ 由

$$F(x, t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x)$$

所定义，是从 f_0 到 f_1 的相对于 X' 的一个同伦．

例 4 是例 1 和 2 的推广．在例 3 中空间 E^2 是凸的，但在 f_0 和 f_1 之间的同伦不能取为例 4 中的同伦的特殊情况，因为它要保持 S^1 在整个过程中映入自身，而 S^1 却并非凸的．

为定义同伦范畴，需要下列容易得到的结果：

5. 定理 *在从 (X, A) 到 (Y, B) 的映射的集合中，相对于 X' 的同伦是个等价关系．*

证明 自反性：对 $f: (X, A)\to(Y, B)$，定义

$$F: f\simeq f \text{ rel } X',$$

由 $F(x, t) = f(x)$．

对称性：给定 $F: f_0\simeq f_1 \text{ rel } X'$，定义 $F': f_1\simeq f_0 \text{ rel } X'$，由 $F'(x, t) = F(x, 1-t)$．

传递性：给定 $F: f_0\simeq f_1 \text{ rel } X'$ 及 $G: f_1\simeq f_2 \text{ rel } X'$，定义 $H: f_0\simeq f_2 \text{ rel } X'$，由

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}; \\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

注意：H 是连续的，因为它限制在 $X\times\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $X\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 这两个闭子集上都是连续的．∎

从此得到，从 (X, A) 到 (Y, B) 的映射的集合可由相对于 X' 的同伦划分为不相交的等价类．这些等价类称为相对于 X' 的同伦类．以 $[X, A; Y, B]_{X'}$ 记这些同伦类的集合．给出

$f: (X, A)\to(Y, B)$，以$[f]_{X'}$记由f确定的$[X, A, Y, B]_{X'}$的元素．在记相对于空集的同伦类的时候省略了X'．

6．定理 同伦的映射的合成是同伦的．

证明 设$f_0\simeq f_1: (X, A)\to(Y, B)\,\mathrm{rel}\, X'$；$g_0\simeq g_1: (Y, B)\to(Z, C)\,\mathrm{rel}\, Y'$．这里$f_1(X')\subset Y'$．为了说明$g_0f_0\simeq g_1f_1: (X, A)\to(Z, C)\,\mathrm{rel}\, X'$，设$F: f_0\simeq f_1\,\mathrm{rel}\, X'$，$G: g_0\simeq g_1\,\mathrm{rel}\, Y'$．则合成

$$(X, A)\times I \xrightarrow{F} (Y, B) \xrightarrow{g_0} (Z, C)$$

是从g_0f_0到g_0f_1相对于X'的同伦；合成

$$(X, A)\times I \xrightarrow{f_1\times 1} (Y, B)\times I \xrightarrow{G} (Z, C)$$

是从g_0f_1到g_1f_1相对于$f_1^{-1}(Y')$的同伦．因$X'\subset f_1^{-1}(Y')$，得到$g_0f_0\simeq g_0f_1\,\mathrm{rel}\, X'$和$g_0f_1\simeq g_1f_1\,\mathrm{rel}\, X'$．则由定理5得到结论．▌

这个结果说明了存在偶的同伦范畴，其对象为拓扑偶，其态为同伦类（相对于$\emptyset$）．此范畴包含拓扑空间的同伦范畴（也简称为同伦范畴）和点标拓扑空间的同伦范畴为其满子范畴．有一个从偶和映射的范畴到偶的同伦范畴的协变函子，其对象函数为恒同映射，其映射函数把映射f变到其同伦类$[f]$．如本节开始所指出的，我们考虑的代数函子的大多数将定义在适当的同伦范畴上．一个拓扑偶和映射组成的图表称为同伦交换的，若它能被做成同伦范畴中（即当每个映射为其同伦类代替时）的交换图表．

如同例1.2.4中所做的，对任意偶(P, Q)存在从偶的同伦范畴到集合和函数的范畴的协变函子$\pi_{(P,Q)}$（或反变函子$\pi^{(P,Q)}$），由$\pi_{(P,Q)}(X, A)=[P, Q; X, A]$（或$\pi^{(P,Q)}(X, A)=[X, A; P, Q]$）定义；且若$f: (X, A)\to(Y, B)$，则$\pi_{(P,Q)}([f])=f_*$（或$\pi^{(P,Q)}([f])=f^*$），其中$f_*[g]=[fg]$，对$g: (P, Q)\to(X, A)$（或$f^*[h]=[hf]$，对$h: (Y, B)\to(P, Q)$）．若$\alpha: (P, Q)\to(P', Q')$，存在从$\pi_{(P',Q')}$到$\pi_{(P,Q)}$的自然变换$\alpha^*$和从$\pi^{(P,Q)}$到$\pi^{(P',Q')}$的自然变换$\alpha_*$．

映射$f: (X, A)\to(Y, B)$称为同伦等价，若$[f]$是偶的同伦

范畴中的等价. 映射 $g:(Y, B)\to(X, A)$ 称为 f 的同伦逆，若在同伦范畴中$[g]=[f]^{-1}$. 偶 (X, A) 和 (Y, B) 称为有相同的伦型，若他们在同伦范畴中是等价的*).

最简单的非空空间是单点空间. 下面示性这种空间的伦型. 一个拓扑空间 X 称为可缩的，若 X 到自身的恒同映射同伦于某常值映射. 设这个常值映射的像为 $x_0\in X$，从 1_X 到这常值映射的同伦称为将 X 压缩到 x_0. 例 1 和 2 说明 $\boldsymbol{R}^n$ 和 I 是可缩的，例 4 说明 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一凸子集是可缩的. 下述引理则可视为例 4 的结果的推广.

7. 引理 任意空间到一可缩空间的任二映射同伦.

证明 设 Y 是可缩空间，$1_Y\simeq c$，这里 c 是 Y 到自身的某常值映射. 设 $f_0, f_1: X\to Y$ 是任意的. 由定理 6，$f_0=1_Yf_0\simeq cf_0$，类似地，$f_1\simeq cf_1$. 但 $cf_0=cf_1$，故由定理 5 得出 $f_0\simeq f_1$. ∎

8. 推论 若 Y 是可缩的，则 Y 到自身的任意两个常值映射是同伦的，且恒同映射同伦于 Y 到自身的任一常值映射. ∎

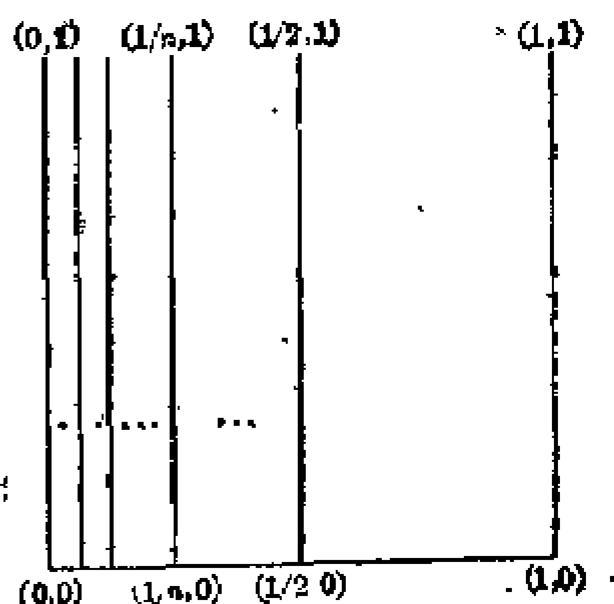


图 1 梳空间

有趣的是引理 7 的结论是不能强化到相对同伦的情况的. 即若 f_0 和 f_1 是 X 到一可缩空间 Y 的映射，在 $X'\subset X$ 上重合，则

$$f_0\simeq f_1 \text{ rel } X'$$

不必须是真的(尽管例 4 说明对于 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸子集来说这是真的). 以下的例子可以阐明这一点，这个例子今后还会用到.

9. 例 梳空间 Y 如图 1 所示. 它的定义是:

---

*) 本书和其它文献都经常说：(X, A)和(Y, B)同伦等价，或(X, A)和(Y, B)是同伦等价的. ——译注

$$Y=\left\{(x,\ y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ x=0,\ \frac{1}{n}\right.$$

$$\left.\text{或 } y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}.$$

设 $F: Y\times I\to Y$ 由 $F((x,\ y),\ t)=(x,\ (1-t)y)$. 则 F 是从 1_Y 到 Y 向 X 轴投影的同伦. 因为后者同伦于常值映射, 故 Y 是可缩的. 设 $c: Y\to Y$ 是 Y 到点 (0, 1) 的常值映射. 由推论 8, $1_Y\simeq c$. 但是尽管这两个映射在点(0, 1)上重合, 它们之间并不存在相对于点(0, 1)的同伦[*].

下述的定理说明可缩空间在同伦的意义下是尽可能简单的.

10 定理 一个空间是可缩的, 当且仅当它与单点空间有相同伦型.

证明 设 X 是可缩的, $F: X\times I\to X$ 把 X 压缩到一点 $x_0\in X$. 设 P 为由 x_0 组成的单点空间, 且设 $f: X\to P$ 及 $j: P\subset X$. 则 $fj=1_P$ 且 $F: 1_X\simeq jf$. 所以 $[j]=[f]^{-1}$, 从而 f 是从 X 到 P 的同伦等价.

反之, 若 X 与单点空间 P 同伦等价, 设 $f: X\to P$ 为此同伦等价, 其同伦逆 $g: P\to X$. 则 $1_X\simeq gf$. 因 gf 是常值映射, 故 X 是可缩的. ▌

11. 推论 两个可缩空间有相同的伦型, 且在可缩空间之间的任意连续映射都是同伦等价的.

证明 第一部分由定理 10 及具有相同伦型关系的传递性推得, 第二部分由第一部分及引理 7(以及由这样的明显的事实, 即任一同伦于一个同伦等价的映射也是一个同伦等价)推得. ▌

下一个结果建立了一个在同伦和映射的扩充的可能性之间的重要联系.

12. 定理 设 p_0 是 S^n 中的任一点, $f: S^n\to Y$. 则下列各条是等价的

(a) f 是零伦的;

[*] 相对于某点的同伦应理解为相对于由该点组成的子空间的同伦. 本书还将多次用到. ——译注

(b) f 可以连续地扩充到 E^{n+1} 上；

(c) f 是相对于 p_0 零伦的.

证明 (a)⇒(b) 设 F: $f\simeq c$, 其中 c 是 S^n 到 Y 的像为 $y_0\in Y$ 的常值映射. 定义 f 到 E^{n+1} 上的扩充 f', 由

$$f'(x)=\begin{cases} y_0, & 0\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{2};\\ F\left(\frac{x}{\|x\|},\ 2-2\|x\|\right), & \frac{1}{2}\leqslant\|x\|\leqslant 1.\end{cases}$$

因对所有的 $x\in S^n$, $F(x,1)=y_0$, 故映射 f' 是已定义的. f' 是连续的, 因为它限制在 $\left\{x\in E^{n+1}\,|\,0\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 和 $\left\{x\in E^{n+1}\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant\|x\|\leqslant 1\right\}$ 这两个闭集上都连续. 因为对 $x\in S^n$, $F(x,0)=f(x)$, 所以 $f'|S^n=f$, 且 f' 是 f 到 E^{n+1} 上的连续扩充.

(b)⇒(c) 若 f 有连续扩充 f': $E^{n+1}\to Y$, 定义 F: $S^n\times I\to Y$, 由

$$F(x,t)=f'((1-t)x+tp_0).$$

则 $F(x,0)=f'(x)=f(x)$, 且对 $x\in S^n$, $F(x,1)=f'(p_0)$. 因为 $F(p_0,t)=f'(p_0)$ $(t\in I)$, 故 F 是从 f 到其像为 $f'(p_0)$ 的常值映射的相对于 p_0 的同伦.

(c)⇒(a) 是显然的. ∎

综合引理 7 与定理 12, 得到下述结果:

13. 推论 从 S^n 到一可缩空间的任一连续映射有一个到 E^{n+1} 上的连续扩充. ∎

§4 收缩和形变

本节主要涉及包含映射. 我们考虑在拓扑空间和连续映射的范畴中或同伦范畴中, 这样的映射有没有左逆, 右逆或双边逆*).

*) 本节的许多结果可见于 R. H. Fox: On homotopy type and deformation retracts, *Ann. of Math.*, Vol. 44, 40~50, 1943 (亦见 H. Samelson: Remark on a paper by R. H. Fox, *Annals of Math*, Vol. 45, 448~449, 1944.)——原注

X 的子空间 A 称为 X 的收缩核，若包含映射 $i: A\subset X$ 在拓扑空间和连续映射的范畴中有左逆. 故 A 是 X 的收缩核，当且仅当存在连续映射 $r: X\to A$，使 $ri=1_A$[亦即，$r(x)=x$ 对 $x\in A$]. 这样的映射 r 称为 X 到 A 的一个收缩.

X 的子空间 A 称为 X 的弱收缩核，若包含映射 $i: A\subset X$ 有左同伦逆(亦即，在同伦范畴内有左逆). 这样，A 是 X 的弱收缩核，当且仅当存在连续映射 $r: X\to A$，使 $ri\simeq 1_A$. 这样的映射 r 称为 X 到 A 的一个弱收缩.

任意单点子空间是任一包含它的较大的空间的收缩核. 一个多于一点的离散空间不是包含它的连通空间的弱收缩核. 若 A 是 X 的收缩核，则它是 X 的弱收缩核. 反之不真，如下例所说明的.

1. 例 设 X 是 R^2 中的闭单位方形 I^2，且设 $A\subset X$ 是例 1.3.9 的梳空间. 则 A 和 X 都是可缩的，且由推论 1.3.11，包含映射 $A\subset X$ 是同伦等价. 所以 A 是 X 的弱收缩核. 然而可以证明 A 不是 X 的收缩核*).

尽管一般地有这个事实：弱收缩核不见得是收缩核，但这两个概念在 A 是 X 的适当的子空间时却是一致的. 这一以后经常出现可充分保证特别的考虑，将证明是有用的. 设 Y 是个空间，(X, A) 是个偶. (X, A) 称为关于 Y 有同伦扩充性质，若给定映射 $g: X\to Y$ 和映射 $G: A\times I\to Y$，使(对 $x\in A$) $g(x)=G(x, 0)$，便存在映射 $F: X\times I\to Y$，使对 $x\in X$，$F(x, 0)=g(x)$，并且 $F|A\times I=G$. 若视 g 为从 $X\times 0$ 到 Y 的映射，则 F 的存在性等价于下述交换图表中虚箭头所对应的映射的存在性：

$$\begin{array}{ccccc}
A\times 0 & & \subset & & A\times I \\
 & & & \swarrow G & \\
\cap & & Y & & \cap \\
 & \nearrow g & & \nwarrow & \\
X\times 0 & & \subset & & X\times I
\end{array}$$

*) 这个证明不是显而易见的. 读者不妨另考虑 A 取 X 的内集，证明要容易得多. 译注

若(X, A)关于Y有同伦扩充性质，且f_0, f_1: $A\to Y$同伦，则若f_0有一个到X上的扩充，f_1便也有；因为，若g: $X\to Y$是f_0的扩充，且G: $A\times I\to Y$是从f_0到f_1的同伦，则同伦扩充性质蕴涵映射F: $X\times I\to Y$作为G的扩充的存在性，所以$F(x, 1)$确定的函数$X\to Y$是f_1的扩充。这导出映射$A\to Y$能否扩充于X上是映射的同伦类的性质。所以同伦扩充性质蕴涵对于映射$A\to Y$的扩充问题是同伦范畴的问题。

(X, A)关于任意空间都有同伦扩充性质的情况特别重要。更一般地，映射f: $X'\to X$称为上纤维化，若给出映射g: $X\to Y$及映射G: $X'\times I\to Y$（这里Y是任给的），使$g(f'(x))=G(x', 0)$（对$x'\in X'$），便存在映射F: $X\times I\to Y$，使$F(x, 0)=g(x)$（对$x\in X$），且对$x'\in X'$和$t\in I$，$F(f(x'), t)=G(x', t)$。若g视为从$X\times 0$到Y的映射，则F的存在性等价于下述交换图表中虚箭头对应的映射的存在性：

$$\begin{array}{ccc} X'\times 0 & \subset & X'\times I \\ & & \swarrow G \\ f\times 1_0 \downarrow & Y & \downarrow f\times 1_I \\ & g\nearrow \quad \nwarrow & \\ X\times 0 & \subset & X\times I \end{array}$$

这样，包含映射i: $A\subset X$是上纤维化，当且仅当(X, A)对任意空间有同伦扩充性质。

2. 定理 *若(X, A)关于A有同伦扩充性质，则A是X的弱收缩核，当且仅当A是X的收缩核。*

证明 我们来阐明任意弱收缩r: $X\to A$事实上同伦于一个收缩。设i: $A\subset X$，则$ri\simeq 1_A$。设G: $A\times I\to A$是从ri到1_A的同伦，则$G(x, 0)=r(x)$（对$x\in A$）。因为(X, A)关于A有同伦扩充性质，故有映射F: $X\times I\to A$成为G的扩充，使$F(x, 0)=r(x)$（对$x\in X$）。若r': $X\to A$由$r'(x)=F(x, 1)$定义，则r'是X到A的收缩，且F是从r到r'的同伦。■

我们在考虑带有同伦左逆的包含映射的同时，亦可考虑带有

同伦右逆的包含映射．这导致下列的定义：给定 $X'\subset X$，X' 在 X 中的形变 D 是一个同伦 D：$X'\times I\to X$，使对 $x'\in X'$，$D(x',0)=x'$．若再加上条件 $D(X'\times 1)$ 包含在 X 的子空间 A 中，则 D 称为 X' 到 A 的一个形变，且称 X' 在 X 中可形变入 A．空间 X 称为可形变入一子空间 A，若它在自身中可形变入 A．这样，空间 X 可缩，当且仅当它可形变入它的一个单点子空间．

3．引理 空间 X 可形变入一子空间 A，当且仅当包含映射 i：$A\subset X$ 有同伦右逆．

证明 若 i 有同伦右逆 f：$X\to A$，则 $if\simeq 1_X$．设 F：$X\times I\to X$ 是从 1_X 到 if 的同伦，且 $F(x,0)=x$．从而 F 是 X 的形变，且 $F(X\times 1)=if(X)\subset A$．于是 X 可形变入 A．

反之，若 X 可形变入 A，设 D：$X\times I\to X$ 是一形变，使 $D(X\times 1)\subset A$．设 f：$X\to A$ 由等式

$$if(x)=D(x,1)\quad(x\in X)$$

所确定．则 D：$1_X\simeq if$；这说明了 f 是 i 的同伦右逆．∎

请注意，除掉 $A=X$ 这个平凡的情况外，包含映射在拓扑空间和连续映射的范畴中没有右逆．

我们现在考虑成为同伦等价的包含映射．子空间 $A\subset X$ 称为 X 的弱形变收缩核，若包含映射 i：$A\subset X$ 是同伦等价．由引理1.1.1和上述的引理3得到下述结果．

4．引理 A 是 X 的弱形变收缩核，当且仅当 A 是 X 的弱收缩核且 X 可形变入 A．∎

如同弱收缩核的概念一样，有一个比弱形变收缩核更有用的概念．子空间 A 是 X 的强形变收缩核，若存在 X 到 A 的收缩 r，使若 i：$A\subset X$，则 $1_X\simeq ir \text{ rel } A$．若 F：$1_X\simeq ir \text{ rel } A$，则 F 称为从 X 到 A 的强形变收缩．

对已经定义的弱和强形式加以比较，可以获得一个中间的有用的概念．子空间 A 称 X 的形变收缩核，若有 X 到 A 的收缩 r，使若 i：$A\subset X$，则 $1_X\simeq ir$．若 F：$1_X\simeq ir$，则 F 称为 X 到 A 的形变收缩．一同伦 F：$X\times I\to X$ 是形变收缩，当且仅当 $F(x,0)$

$=x$ (对 $x\in X$), $F(X\times 1)\subset A$, 且 $F(x, 1)=x$ (对 $x\in A$). 它是强形变收缩, 当且仅当另外再满足条件: $F(x, t)=x$ (对 $x\in A$ 及 $t\in I$).

5. 例 从例 1.3.4 得出 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸子集的任意单点子集是该凸集的强形变收缩核.

6. 例 S^n 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}-0$ 的强形变收缩核. 事实上, 映射 $F: (\boldsymbol{R}^{n+1}-0)\times I\to\boldsymbol{R}^{n+1}-0$ 由

$$F(x, t)=(1-t)x+\frac{tx}{\|x\|}, \quad x\in\boldsymbol{R}^{n+1}-0 \quad (t\in I)$$

所定义. F 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}-0$ 到 S^n 的强形变收缩.

显然, 强形变收缩核是形变收缩核, 形变收缩核是弱形变收缩核. 下列例子说明这些蕴涵关系都是不可逆的.

7. 例 如上述例 1, 设 X 是闭单位方形, A 是梳空间. 如例 1 所指出, 包含映射 $A\subset X$ 是同伦等价, 但 A 不是 X 的收缩核. 所以 A 是 X 的弱形变收缩核, 而不是它的形变收缩核.

8. 例 设 X 是梳空间, 而 A 是由点 $(0, 1)$ 组成的 X 的单点子空间. 因 X 是可缩的, 有一个从 1_X 到 X 的常值映射到 A 的同伦 F. 此映射 F 是从 X 到 A 的形变收缩. 然而, 如同例 1.3.9 使我们注意到的, 不存在从 1_X 到那常值映射的相对于 A 的同伦. 所以 A 是 X 的形变收缩核, 不是它的强形变收缩核.

在适当的同伦扩充性质出现时, 有关形变收缩的三个概念相重合, 现在来证明这一情况.

9. 引理 *若 X 可形变入收缩核 A, 则 A 是 X 的形变收缩核.*

证明 设 $r: X\to A$ 是收缩, 且设 $i: A\subset X$. 则 r 是 i 的左同伦逆. 因为 X 可形变入 A, 则从引理 3, i 有右同伦逆. 由引理 1.1.1, r 也是 i 的右同伦逆. 因 $1_X\simeq ir$, 故 A 是 X 的形变收缩核. ▌

综合引理 9 同定理 2, 得到下述推论:

10. 推论 *若 (X, A) 有关于 A 的同伦扩充性质, 则 A 是 X*

的弱形变收缩核，当且仅当 A 是 X 的形变收缩核. ▌

11. 定理 若 $(X\times I, (X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1))$ 关于 X 有同伦扩充性质，且 A 在 X 中是闭的，则 A 是 X 的形变收缩核，当且仅当 A 是 X 的强形变收缩核。

证明 若 A 是 X 的形变收缩核，设 F: $X\times I\to X$ 是从 1_X 到 ir 的同伦，其中 r: $X\to A$ 是收缩，且 i: $A\subset X$。定义一个同伦

$$G:\ [(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)]\times I\to X$$

由下列等式给出：

$$G((x,0),t')=x\quad(x\in X,\ t'\in I);$$

$$G((x,t),t')=F(x,(1-t')t)\quad(x\in A,\ t,t'\in I);$$

$$G((x,1),t')=F(r(x),1-t')\quad(x\in X,\ t'\in I).$$

G 是被完全定义了的，这是因为对于 $x\in A$，

$$G((x,0),t')=x=F(x,0),$$

这由前两个等式得来. 而

$$G((x,1),t')=F(x,1-t')=F(r(x),1-t'),$$

这由后两个等式得来. G 是连续的，因为它限制在三个闭子集 $(X\times 0)\times I$，$(A\times I)\times I$ 及 $(X\times 1)\times I$ 上都是连续的. 对于 $(x,t)\in(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)$，$G((x,t),0)=F(x,t)$[因为 $F(x,0)=x$，且因 r 是收缩，故 $F(r(x),1)=ir(r(x))=r(x)=F(x,1)$]. 所以 G 限制在 $[(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)]\times 0$ 上能够扩充到 $(X\times I)\times 0$ 上. 从所假设的同伦扩充性质，G 限制在 $[(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)]\times 1$ 上可扩充到 $(X\times I)\times 1$ 上. 设 G': $(X\times I)\times 1\to X$ 是这样一个扩充，并定义 H: $X\times I\to X$，由 $H(x,t)=G'((x,t),1)$. 则得等式

$$H(x,0)=G'((x,0),1)=G((x,0),1)=x\quad(x\in X);$$

$$H(x,1)=G((x,1),1)=F(r(x),0)=r(x)\quad(x\in X);$$

$$H(x,t)=G((x,t),1)=F(x,0)=x\quad(x\in A,\ t\in I).$$

所以，H 是从 1_X 到 ir 的相对于 A 的同伦. 这样，A 是 X 的强形变收缩核. ▌

以下的结果断言：任一映射在同伦范畴中等价于一个包含映射，此包含映射是个上纤维化．设 $f: X\to Y$，记 Z_f 为由在 $X\times I$ 和 Y 的拓扑和中把 $(x, 1)\in X\times I$ 与 $f(x)\in Y$ 等同起来而得到的商空间．Z_f 称为 f 的映射柱，图 2 是其示意图．

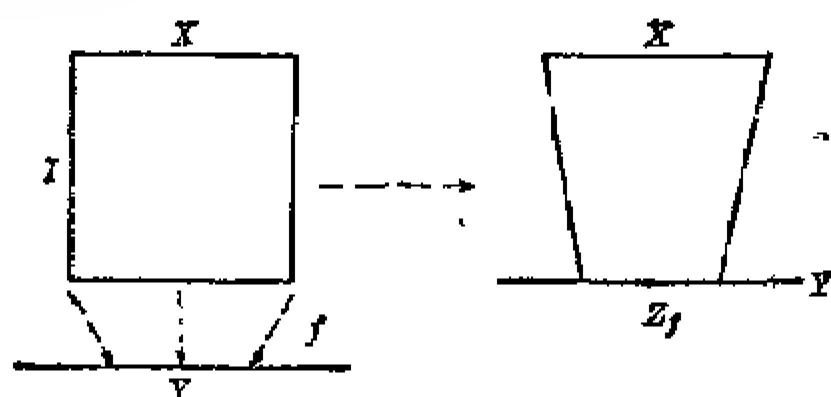


图 2 映射柱

我们用 $[x, t]$ 记 Z_f 中在迭合映射下 $(x, t)\in X\times I$ 对应的点，$[y]$ 记 Z_f 中 $y\in Y$ 对应的点（这样，$[x, 1]=[f(x)]$，$x\in X$）．存在嵌入 $i: X\to Z_f$ 使得 $i(x)=[x, 0]$ 及嵌入 $j: Y\to Z_f$ 使得 $j(y)=[y]$．X 和 Y 在这两个嵌入的意义下视为 Z_f 的子空间．收缩 $r: Z_f\to Y$ 由 $r[x, t]=[f(x)]$ 及 $r[y]=[y]$ 给出，其中 $x\in X$，$t\in I$，$y\in Y$．

12．定理 给定映射 $f: X\to Y$，则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z_f \\ & f\searrow \quad \swarrow r & \\ & Y & \end{array}$$

使得

(a) $1_{Z_f}\simeq jr \text{ rel } Y$；

(b) i 是上纤维化．

证明 由定义，$ri=f$，从而图表可交换．

(a) 同伦 $F: Z_f\times I\to Z_f$ 由

$$F([x, t], t')=[x, (1-t')t+t'] \quad (x\in X, t, t'\in I);$$

$$F([y], t')=[y] \quad (y\in Y, t'\in I)$$

所定义．则 $F: 1_{Z_f}\simeq jr \text{ rel } Y$．

(b) 设 $g: Z_f \to W$ 及 $G: X\times I\to W$ 使 $g([x, 0]) = G(x, 0)$ $(x\in X)$. 若 $H: Z_f\times I\to W$ 由等式

$$H([y], t') = g[y] \quad (y\in Y, t'\in I);$$

$$H([x, t], t') = \begin{cases} g[x, (2t-t')/(2-t')] & (0\leqslant t'\leqslant 2t\leqslant 2, x\in X); \\ G(x, (t'-2t)/(1-t)) & (0\leqslant 2t\leqslant t'\leqslant 1, x\in X) \end{cases}$$

所定义, 则 $H([x, t], 0) = g[x, t]$, 且 $H([y], 0) = g[y]$, $H|X\times I = G$. ▌

可以推出, 映射 $i: X\subset Z_f$ 是上纤维化, 在同伦范畴中等价于映射 $f: X\to Y$. 映射柱可以用来证明下述有趣的结果.

13 定理 *两个空间 X 和 Y 有相同的伦型, 当且仅当它们能被作为弱形变收缩核嵌入同一个空间 Z.*

证明 若 X 和 Y 能被作为弱形变收缩核嵌入同一个空间 Z, 则 X 和 Y 都与 Z 有相同伦型. 所以 X 和 Y 有相同伦型.

反之, 若 $f: X\to Y$ 是同伦等价, 则从定理 12, 设 Z_f 是 f 的映射柱, 则合成 $X\xrightarrow{i} Z_f\xrightarrow{r} Y$ 是同伦等价. 因为 r 是同伦等价, 这蕴涵 i 是同伦等价. 由定理 12a, $j: Y\to Z_f$ 是同伦等价. 所以 X 和 Y 作为弱形变收缩核而被嵌入 Z_f. ▌

上述全部概念亦可对于偶来考虑. 例如, 偶 $(X', A')\subset(X, A)$ 是强形变收缩核, 若存在映射 $F: (X, A)\times I\to(X, A)$ 使 $F(x, 0) = x$ (对 $x\in X$), $F(X\times 1)\subset X'$, $F(A\times 1)\subset A'$, 且 $F(x', t) = x'$ (对 $x'\in X'$ 及 $t\in I$). 映射 $f: (X, A)\to(Y, B)$ 的映射柱是偶 (Z_{f_1}, Z_{f_2}), 其中 A 在 X 中是闭的, Z_{f_1} 是由 f 确定的 $f_1: X\to Y$ 的映射柱, Z_{f_2} 是由 f 确定的 $f_2: A\to B$ 的映射柱. 映射 $f: (X', A')\to(X, A)$ 是上纤维化, 若给定映射 $g: (X, A)\to(Y, B)$ 和 $G: (X', A')\times I\to(Y, B)$ [此处, (Y, B) 是任给的], 使 $G(x', 0) = gf(x')$ (对 $x'\in X'$), 便存在映射 $F: (X, A)\times I\to(Y, B)$ 使 $F(x, 0) = g(x)$ (对 $x\in A$), 且 $G(x', t) = F(f(x'), t)$ (对 $x'\in X'$ 及 $t\in I$). 如对于偶采用适当的表达形式, 则余下的所有结果均有效.

§5 H 空 间

从一个空间(或偶)到另一个空间(或偶)的映射的同伦类的集合中,在某些情况下引进自然的群构造是可能的.在本节中我们考虑的空间 P 使$[X; P]$对所有的 X 可以容许一个群的构造. 在$[X; P]$上对所有 X 的自然的群构造与 P 上的"类似群"构造之间存在密切的关系,是不足为怪的.

我们将对点标拓扑空间的同伦范畴进行研究, 尽管我们所作的大部分工作对于拓扑空间的同伦范畴也都有效. 若 X 和 Y 是点标拓扑空间, 以$[X; Y]$记 $X\to Y$ 的连续映射的保基点同伦类的集合(其全部同伦被理解为相对于基点的). 这样, $[X; Y]$是在点标拓扑空间的同伦范畴中从 X 到 Y 的态的集合[*].

在$[X; P]$上得到群构造的一个方法是从 P 上的群构造而来的. 这样,设 P 是个拓扑群,以单位元素为基点. 从 X 到 P 的所有保基点连续映射的集合中, *存在一个由函数的乘法观点确定的*合成法则. 亦即: 若 g_1, g_2: $X\to P$, 则 g_1g_2: $X\to P$ 由 $g_1g_2(x)=g_1(x)g_2(x)$所定义,其中右端是 P 中的群乘积. 以此合成法则,从 X 到 P 的保基点连续映射集合是一个群(它是交换群, 若 P 是交换的群的话). 这个合成法则给出了同伦类的计算, 使$[g_1][g_2]=[g_1g_2]$, 且有下述定理.

1. 定理 *若 P 是拓扑群,则 π^P 是从点标拓扑空间的同伦范畴到群和同态的范畴的反变函子.*

下面给出两个例子:

2. S^1 是个交换拓扑群(模为1的复数的乘法群). 所以$[X; S^1]$是一个交换群,且若 f: $X\to Y$, 则 f^*: $[Y; S^1]\to[X; S^1]$ 是个同态.

3. S^3 是一个拓扑群(模为1的四元数的乘法群). 所以$[X;$

---

[*] 在点标拓扑空间的或其同伦范畴中, 对象应是带基点的空间. 本节中的字母有时表示空间,有时表示点标空间而省去基点,请读时注意. ——译注

$S^3]$ 是个群，且若 $f: X\to Y$，则 $f^*: [Y; S^3]\to[X; S^3]$ 是个同态.

在 $[X; P]$ 上的这个群构造是从 X 到 P 的保基点连续映射集合的群构造诱导出来的. 有这样的情况，$[X; P]$ 容许自然的群构造，但从 X 到 P 的保基点连续映射的集合没有群构造. 例如，若 P 是与某拓扑群 P' 有相同伦型的点标拓扑空间，则 π^P 自然等价于 $\pi^{P'}$. 所以 π^P 可视为到群范畴的函子. 为使 π^P 取值于群和同态的范畴，下列定义将用来描述在点标空间 P 上所需的附加构造.

若 $f: X\to Y$ 和 $g: X\to Z$，我们定义

$$(f, g): X\to Y\times Z$$

是映射，由 $(f, g)(x)=(f(x), g(x))$ (对 $x\in X$).

一个 H 空间由点标拓扑空间 P 及连续乘法

$$\mu: P\times P\to P$$

所组成，其(唯一的)常值映射 $c: P\to P$ 是同伦单位，亦即，两个合成

$$P\xrightarrow{(c,1)}P\times P\xrightarrow{\mu}P$$

和

$$P\xrightarrow{(1,c)}P\times P\xrightarrow{\mu}P$$

皆同伦于 1_P. 乘法 μ 称为同伦结合的，若方形

$$\begin{array}{ccc} P\times P\times P & \xrightarrow{\mu\times 1} & P\times P \\ {\scriptstyle 1\times\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ P\times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

是同伦可交换的，即 $\mu\circ(\mu\times 1)\simeq\mu\circ(1\times\mu)$. 连续函数 $\varphi: P\to P$ 称为对于 P 和 μ 的同伦逆，若合成

$$P\xrightarrow{(1,\varphi)}P\times P\xrightarrow{\mu}P \text{ 和 } P\xrightarrow{(\varphi,1)}P\times P\xrightarrow{\mu}P$$

皆同伦于 $c: P\to P$.

一个带有同伦逆的同伦结合的 H 空间满足在同伦意义下的群公理. 这样的点标空间称为 H 群. 显然，任一拓扑群是 H 群.

在 H 空间中的乘法 μ 称为同伦交换的，若三角形

$$\begin{array}{ccc} P\times P & \xrightarrow{T} & P\times P \\ & \searrow^{\mu} \quad {}^{\mu}\swarrow & \\ & P & \end{array}$$

是同伦交换的，这里 $T(p_1, p_2)=(p_2, p_1)$。带有同伦交换乘法的 H 群叫交换 H 群。

若 P 和 P' 分别为有乘法 μ 和 μ' 的 H 空间，连续映射 $\alpha: P\to P'$ 称作同态，若方形

$$\begin{array}{ccc} P\times P & \xrightarrow{\mu} & P \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha\times\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ P'\times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \end{array}$$

是同伦交换的。

4. 定理 一个与一 H 空间(或 H 群)有相同伦型的点标拓扑空间本身就是这样一个 H 空间(或 H 群)，并以同伦等价为同态。

证明 设 $f: P\to P'$ 和 $g: P'\to P$ 是互为同伦逆的两个映射，P 是 H 空间，以 $\mu: P\times P\to P$ 为乘法。若 $\mu': P'\times P'\to P'$ 由合成

$$P'\times P' \xrightarrow{g\times g} P\times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$$

所给出，则 μ' 是 P' 中的连续乘法，且合成 $P' \xrightarrow{(1,\ c')} P'\times P' \xrightarrow{\mu'} P'$ 等于合成 $P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(1,\ c)} P\times P \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{f} P'$，它同伦于合成 $P' \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} P'$。因 $fg\simeq 1_{P'}$，映射 $\mu'\circ(1,\ c')$ 同伦于 $1_{P'}$。类似地，映射 $\mu'\circ(c',\ 1)$ 同伦于 $1_{P'}$。所以 P' 是 H 空间。因为方形

$$\begin{array}{ccc} P'\times P' & \xrightarrow{\mu'} & P' \\ \downarrow{\scriptstyle g\times g} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P\times P & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

是同伦交换的，所以 g 是同态(f 也是)。若 μ 是同伦结合的或同伦交换的，则 μ' 也是，且若 $\varphi: P\to P$ 是对 P 的同伦逆，则 $f\varphi g: P'\to P'$ 是对 P' 的同伦逆。▌

给定 H 空间 P，对任意点标空间 X，在 $[X; P]$ 中存在一由 $[g_1][g_2]=[\mu\circ(g_1, g_2)]$ 定义的合成法则. 若 P 是 H 群，则 $[X; P]$ 在此合成法则下变为群，且若 $f: X\to Y$，则 $f^*: [Y; P]\to[X; P]$ 是同态. 所以有下述定理:

5. 定理 *若 P 是 H 群，则 π^P 是从点标拓扑空间的同伦范畴到群和同态范畴的反变函子. 若 P 是交换 H 群，则此函子取值于交换群和同态的范畴.* ▌

定理 5 的下述逆定理也成立.

6. 定理 *若 P 是点标空间，使 π^P 取值于群范畴，则 P 是 H 群(若 π^P 取值于交换群范畴，则 P 是交换 H 群). 进一步，对任一点标空间 X，$\pi^P(X)$ 的群构造与定理 5 所给出的相同.*

证明 设 p_1、p_2: $P\times P\to P$ 分别为向两个因子空间的投射，且设 $\mu: P\times P\to P$ 为映射使 $[\mu]=[p_1]*[p_2]$. 其中 $*$ 是群 $[P\times P; P]$ 中的合成法则. 对任意映射 $f, g: X\to P$，$(f, g)^*: [P\times P; P]\to[X; P]$ 是同态，且

$$
\begin{aligned}
[\mu\circ(f, g)]&=(f, g)^*[\mu]=(f, g)^*([p_1]*[p_2])\\
&=(f, g)^*[p_1]*(f, g)^*[p_2]=[f]*[g].
\end{aligned}
$$

这说明 $[X; P]$ 中的乘法是由乘法映射 μ 诱导的.

设 X 是一单点空间. 唯一的映射 $X\to P$ 代表 $[X; P]$ 的单位元素. 因为唯一的映射 $P\to X$ 诱导同态 $[X; P]\to[P; P]$，于是合成 $P\to X\to P$ 这个常值映射 $c: P\to P$ 代表 $[P; P]$ 的单位元素. 这推出 $\mu\circ(1_P, c)\simeq 1_P$，且 $\mu\circ(c, 1_P)\simeq 1_P$. 所以 P 是 H 空间.

为证明 μ 是同伦结合的，记 $q_1, q_2, q_3: P\times P\times P\to P$ 为投射. 则

$$
\begin{aligned}
[\mu\circ(1\times\mu)]&=(1\times\mu)^*[\mu]\\
&=(1\times\mu)^*[p_1]*(1\times\mu)^*[p_2]\\
&=[q_1]*[\mu(q_2, q_3)]=[q_1]*([q_2]*[q_3]).
\end{aligned}
$$

类似地，有 $\quad [\mu\circ(\mu\times 1)]=([q_1]*[q_2])*[q_3]$.

因为 $[P\times P\times P; P]$ 的乘法可结合，所以 $\mu\circ(1\times\mu)\simeq\mu\circ(\mu\times 1)$.

为证明 P 有同伦逆，设 φ: $P\to P$ 使 $[1_P]*[\varphi]=[c]$；则 $\mu\circ(1_P, \varphi)\simeq c$. 又有$[\varphi]*[1_P]=[c]$，从而 $\mu\circ(\varphi, 1_P)\simeq c$. 所以 φ 是 P 的同伦逆.

这证明了 P 是 H 群，且 π^P 中的乘法是由 P 上的乘法诱导的. 若$[P\times P; P]$是交换群，则类似的讨论表明 P 是交换 H 群. ▌

定理 5 和 6 的下述补充是易于用类似方法确定的.

7. 定理 *设 α: $P\to P'$ 是 H 空间之间的映射. 则 $\alpha_\#$ 是在群范畴内从 π^P 到 $\pi^{P'}$ 的自然变换，当且仅当 α 是同态.* ▌

下面描述 H 群的一个特别有用的例子：设 Y 是一个带有基点 y_0 的点标拓扑空间. Y 的(基点在 y_0 的)回路空间记作 ΩY[或 $\Omega(Y, y_0)$]，定义为连续函数 ω: $(I, \dot{I})\to(Y, y_0)$ 的空间，其拓扑取紧致开拓扑. 视 ΩY 为点标空间，其基点 ω_0 等于从 I 到 y_0 的常值映射. 则有映射

$$\mu\colon\ \Omega Y\times\Omega Y\to\Omega Y$$

由
$$\mu(\omega, \omega')(t)=\begin{cases}\omega(2t) & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\right)\\ \omega'(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

给出. 为证明 μ 是连续的，设 E: $\Omega Y\times I\to Y$ 为赋值映射. 由引言中定理 2.8，只须说明合成 $\Omega Y\times\Omega Y\times I\xrightarrow{\mu\times 1}\Omega Y\times I\xrightarrow{E} Y$ 是连续的即可. 给出 μ 定义的上述公式即说明这合成在闭子集 $\Omega Y\times\Omega Y\times\left[0, \frac{1}{2}\right]$和闭子集 $\Omega Y\times\Omega Y\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上都是连续的.

为说明 ΩY 是 H 群，我们来构造需要的一些同伦. 类似的公式将也在 § 1.7 中用于定义拓扑空间中(非闭)道路的同伦.

为证明映射 $\omega\to\mu(\omega, \omega_0)$ 同伦于 ΩY 的恒同映射，定义 F: $\Omega Y\times I\to\Omega Y$ 由

$$F(\omega, t)(t')=\begin{cases}\omega\left(\dfrac{2t'}{t+1}\right) & \left(0\leqslant t'\leqslant\dfrac{t+1}{2}\right)\\ y_0 & \left(\dfrac{t+1}{2}\leqslant t'\leqslant 1\right)\end{cases}$$

给出．此公式说明 $E(F\times 1)$：$(\Omega Y\times I)\times I\to Y$ 是连续的；所以 F 是连续的，且是从映射 $\omega\to\mu(\omega,\ \omega_0)$ 到 $1_{\Omega Y}$ 的同伦．类似地，映射 $\omega\to\mu(\omega_0,\ \omega)$ 同伦于 $1_{\Omega Y}$．所以 ΩY 是以 μ 为乘法的 H 空间．

为说明 μ 是同伦结合的，定义映射

$$G: \Omega Y\times\Omega Y\times\Omega Y\times I\to\Omega Y$$

由公式

$$E(G\times 1)(\omega,\ \omega',\ \omega'',\ t,\ t')=\begin{cases}\omega\left(\dfrac{4t'}{t+1}\right) & \left(0\leqslant t'\leqslant\dfrac{t+1}{4}\right)\\ \omega'(4t'-t-1) & \left(\dfrac{t+1}{4}\leqslant t'\leqslant\dfrac{t+2}{4}\right)\\ \omega''\left(\dfrac{4t'-2-t}{2-t}\right) & \left(\dfrac{t+2}{4}\leqslant t'\leqslant 1\right)\end{cases}$$

给出．则 G：$\mu\circ(\mu\times 1_{\Omega Y})\simeq\mu\circ(1_{\Omega Y}\times\mu)$．这表明 μ 是同伦结合的．

我们定义同伦逆 φ：$\Omega Y\to\Omega Y$，由 $\varphi(\omega)(t)=\omega(1-t)$．然后定义 H：$\Omega Y\times I\to\Omega Y$，由

$$E(H\times 1)(\omega,\ t,\ t')=\begin{cases}y_0 & \left(0\leqslant t'\leqslant\dfrac{t}{2}\right)\\ \omega(2t'-t) & \left(\dfrac{t}{2}\leqslant t'\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\\ \omega(2-2t'-t) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t'\leqslant 1-\dfrac{t}{2}\right)\\ y_0 & \left(1-\dfrac{t}{2}\leqslant t'\leqslant 1\right)\end{cases}$$

给出．H 是从映射 $\omega\to\mu(\omega,\ \varphi(\omega))$ 到 ΩY 的常值自映射的同伦．类似地，有一个从映射 $\omega\to\mu(\varphi(\omega),\ \omega)$ 到 ΩY 的常值自映射的同伦．所以 φ 是 ΩY 的同伦逆，且 ΩY 是 H 群．

若 h：$Y\to Y'$ 保持基点，则有映射

$$\Omega h: \Omega Y\to\Omega Y'$$

由 $\Omega h(\omega)(t)=h(\omega(t))$ 定义．显然，Ωh 是同态．现概括关于回路空间的这些结果如下：

9 定理 回路函子是从点标拓扑空间和连续映射的范畴到 H 群和连续同态的范畴的协变函子*). ∎

函子 Ω 也保持同伦. 亦即: 若 $h_0, h_1: Y \to Y'$ 是由 h_t 所联接的同伦的, 则 $\Omega h_0, \Omega h_1: \Omega Y \to \Omega Y'$ 是由 Ωh_t 所联接的同伦的, 它对每个 $t \in I$ 是连续同态.

§6 同纬映象

在本节中, 打算处理与§1.5的结果相对偶的结果. 我们考虑这样的点标空间 Q, 它使得 π_Q 是从点标空间的同伦范畴到群和同态的范畴的协变函子, 这导致对偶于 H 群概念的 H 上群的概念. H 上群的一个重要例子是点标空间的同纬映象, 是一个与回路空间概念相对偶的概念. 本节中定义的同伦群是从同纬映象到空间的映射的同伦类做成群的例子.

若 X 和 Y 是点标拓扑空间, 它们在点标拓扑空间范畴中的和记为 $X \vee Y$. 若 X 有基点 x_0, Y 有基点 y_0, 则 $X \vee Y$ 可视为 $X \times Y$ 的子空间 $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$. 若 $f: X \to Z$ 及 $g: Y \to Z$, 我们令 $(f, g): X \vee Y \to Z$ 是由和的特性定义的映射[即 $(f, g)|X = f$ 及 $(f, g)|Y = g$].

一个 H 上群由一点标拓扑空间 Q 及连续上乘法

$$\nu: Q \to Q \vee Q$$

组成, 使下列性质成立:

同伦单位的存在性: 若 $c: Q \to Q$ 是(唯一的)常值映射, 则合成

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(c, 1)} Q \text{ 和 } Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{(1, c)} Q$$

皆同伦于 1_Q.

同伦结合律: 方形

---

* H 群的"连续同态"与前面定义的同态是同一概念. 其范畴在前面未明确给出, 但合成法则与两个公理的验证是明显的. ——译者

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q\vee Q \\ \nu\downarrow & & \downarrow 1\vee\nu \\ Q\vee Q & \xrightarrow{\nu\vee 1} & Q\vee Q\vee Q \end{array}$$

是同伦可交换的。

同伦逆的存在性：存在映射 φ: $Q\to Q$ 使合成

$$Q\xrightarrow{\nu} Q\vee Q\xrightarrow{(1,\varphi)} Q \quad 和 \quad Q\xrightarrow{\nu} Q\vee Q\xrightarrow{(\varphi,1)} Q$$

皆同伦于 c: $Q\to Q$。

若 X 是任一点标空间，且 Q 是一 H 上群，则在 $[Q;X]$ 中存在一个合成法则，由 $[f_1][f_2]=[(f_1,f_2)\circ\nu]$ 确定，它将 $[Q;X]$ 做成群。

H 上群称为交换的，若三角形

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ \swarrow\nu & & \nu\searrow \\ Q\vee Q & \xrightarrow{T'} & Q\vee Q \end{array}$$

是同伦可交换的，其中 $T'(q_1,q_2)=(q_2,q_1)$（对 $q_1,q_2\in Q$）。

若 Q 和 Q' 分别是带上乘法 ν 和 ν' 的 H 上群，映射 β: $Q\to Q'$ 称为同态，若方形

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q\vee Q \\ \beta\downarrow & & \downarrow\beta\vee\beta \\ Q' & \xrightarrow{\nu'} & Q'\vee Q' \end{array}$$

是同伦可交换的。

下列定理的证明对偶于关于 H 群的相应的命题的证明（见定理 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6 和 1.5.7），此处从略。

1. 定理 若一点标空间与一 H 上群有相同的伦型，则其自身就是这样一个 H 上群，它以同伦等价为同态。▌

2. 定理 若 Q 是 H 上群，则 π_Q 是从点标空间的同伦范畴到群和同态的范畴的协变函子。若 Q 是交换的 H 上群，则此函子取值于交换群范畴。▌

3. 定理 若 Q 是点标空间，使 π_Q 取值于群范畴，则 Q 是 H

上群(若 π_Q 取值于交换群范畴，则 Q 是交换 H 上群)．进一步，$\pi_Q(X)$ 上的群构造与定理 2 中由 Q 的 H 上群构造所决定的群构造是等同的．

4．**定理**　若 $\beta: Q\to Q'$ 是 H 上群间的映射，则在群范畴内 $\beta_\#$ 是从 $\pi_{Q'}$ 到 π_Q 的自然变换，当且仅当 β 是同态．▌

下面描述一个 H 上群的例子，它与作为 H 群的例子的回路空间相对偶．设 Z 为点标拓扑空间，以 z_0 为基点．Z 的同纬映象记作 SZ，由在 $Z\times I$ 上把 $(Z\times 0)\cup(z_0\times I)\cup(Z\times 1)$ 等同为一点而得到的商空间来定义．有的文献上称之为约化同纬映象，而把术语"同纬映象"用于(无基点)空间范畴的同纬映象，它是在 $Z\times I$ 上把 $Z\times 0$ 叠合为一点及把 $Z\times 1$ 叠合为另一点所得到的商空间．

若 $(z, t)\in Z\times I$，我们用 $[z, t]$ 记 SZ 中的在商映射 $Z\times I\to SZ$ 下对应的点．则 $[z, 0]=[z_0, t]=[z', 1]$（对所有 $z, z'\in Z$ 及 $t\in I$）．点 $[z_0, 0]\in SZ$ 也记为 z_0，且 SZ 是一以 z_0 为基点的点标空间．若 $f: Z\to Z'$，则 $Sf: SZ\to SZ'$，由 $Sf[z, t]=[f(z), t]$ 定义．这样，S 是从点标空间和连续映射范畴的协变函子．为说明它是到 H 上群和同态范畴的协变函子，我们定义上乘法

$$\nu: SZ\to SZ\vee SZ$$

由公式
$$\nu([z, t])=\begin{cases}([z, 2t], z_0) & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\\ (z_0, [z, 2t-1]) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

所给出，见图 3(其中，虚线缩为一点）映射 ν 赋予 SZ 以 H 上群

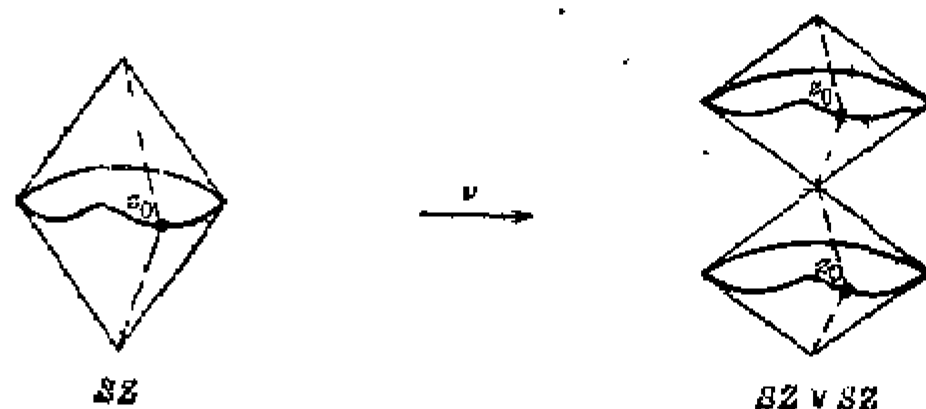


图 3

构造，使若 $f: Z\to Z'$，则 Sf 是同态. 这一点可以直接验证或从回路空间已建立的性质导出，我们将其放在以下内容的后面.

前面定义的从点标空间和连续映射的范畴到自身的函子 Ω 和 S 是伴随函子的例子. 这意味着对于点标空间 Z 和 Y 存在等价

$$\hom(SZ, Y)\approx\hom(Z, \Omega Y),$$

其中，两端皆被理解为在点标空间和连续映射范畴中态的集合*). 这等价于引言中定理 2.8 的结果，且若 $g: Z\to\Omega Y$，则对应的 $g': SZ\to Y$ 由 $g'[z, t]=g(z)(t)$ 来定义（对于 $z\in Z$ 和 $t\in I$）. 显然，若 $h: Y\to Y'$，则 $(\Omega h\circ g)'=h\circ g'$，且若 $f: Z'\to Z$，则 $(g\circ f)'=g'\circ Sf$. 所以等价 $g\leftrightarrow g'$ 来自从函子 $\hom(S\cdot, \cdot)$ 到函子 $\hom(\cdot, \Omega\cdot)$ 的自然等价.

这个自然等价变为点标空间的同伦范畴中的态. 对点标空间一个同伦 $G: Z\times I\to Y$ 必须映 $z_0\times I$ 到 y_0. 故这定义了映射 $F: Z\times I/z_0\times I\to Y$. 因 $S(Z\times I/z_0\times I)$ 可等同于 $SZ\times I/z_0\times I$，由同胚

$$[(z, t), t']\leftrightarrow([z, t'], t)\quad (z\in Z; t, t'\in I),$$

故得出同伦 $F: Z\times I/z_0\times I\to\Omega Y$ 双映地对应于同伦 $F': SZ\times I/z_0\times I\to Y$. 故上述等价给出了等价

$$[SZ; Y]\approx[Z; \Omega Y]$$

使得若映射 $g: Z\to\Omega Y$ 和映射 $g': SZ\to Y$ 由 $g'[z, t]=g(z)(t)$ 联系，则 $[g']$ 对应于 $[g]$. 由此，存在从函子 $[S\cdot; \cdot]$ 到函子 $[\cdot; \Omega\cdot]$ 的自然等价**).

从这些注记可推出，对一确定的点标空间 Z，函子 π_{SZ} 自然等价于合成函子 $\pi_Z\circ\Omega$. 这里 Ω 视为到 H 群和同态的同伦范畴的协变函子. 则合成 $\pi_Z\circ\Omega$ 取值于群和同态范畴. 由定理 3, SZ 是

*) 前面定义的函子 S 是到 H 上群和同态的范畴，此处又被认为到点标空间的范畴. 由于前者不是后者的满子范畴，故提到 hom 时要指明在哪个范畴中. 当然，此处 Y 不见得是 H 上群. 若是 H 上群，则更易混淆，必须说明. ——译注

**) 这里出现函子 $[S\cdot; \cdot]$ 与 $[\cdot; \Omega\cdot]$ 的写法并无定义. 本书后面还有类似记号，only能根据上下文弄出. 这里的 $[S\cdot; \cdot]$ 是点标空间范畴到群范畴的二元函子，前反变，后协变. $[\cdot; \Omega\cdot]$ 也如此. ——译者

H 上群，且上面定义的映射 ν: $SZ\to SZ\vee SZ$ 是 H 上群 SZ 中的上乘法之一(或同伦于它)．类似地，若 $f: Z\to Z'$，则从 $\pi_{SZ'}$ 到 π_{SZ} 的自然变换 $(Sf)^*$ 对应于从合成 $\pi_{Z'}\circ\Omega$ 到合成 $\pi_Z\circ\Omega$ 的自然变换 f^*．因为后者是在群范畴中的自然变换，所以 $(Sf)^*$ 也是，且由定理 4，Sf 是 H 上群 SZ 到 H 上群 SZ' 的同态．

以上叙述可综合于下：

5．定理 *同纬映象函子 S 是从点标空间和映射的范畴到 H 上群和连续同态范畴的协变函子．* ▌

函子 S 也保持同伦．亦即：若 f_0, f_1: $Z\to Z'$ 是由 f_t 所同伦的，则 Sf_0 和 Sf_1 是由 Sf_t 所同伦的，它对每个 $t\in I$ 都是连续同态．

我们现在来说明对 $n\geqslant 1$，球 S^n 同胚于一个同纬映象，且这样可得到一族有用的 H 上群．其对应的函子叫做*同伦群函子*，具有特别的重要性．

6．引理 *对 $n\geqslant 0$，$S(S^n)$ 同胚于 S^{n+1}．*

证明 设 $p_0=(1, 0, \cdots, 0)$ 是 S^n 的基点；我们把 R^{n+1} 嵌入 R^{n+2} 看成 R^{n+2} 的第 $(n+2)$ 个坐标为 0 的点的子集．则 S^n 作为赤道球嵌入 S^{n+1}：

$$S^n=\{z\in R^{n+2}\mid \|z\|=1 \text{ 且 } z_{n+2}=0\};$$

且 E^{n+1} 也嵌入 E^{n+2}：

$$E^{n+1}=\{z\in R^{n+2}\mid \|z\|\leqslant 1 \text{ 且 } z_{n+2}=0\}.$$

设 H_+ 和 H_- 是 S^{n+1} 的由赤道 S^n 确定的两个闭半球，则

$$H_+=\{z\in S^{n+1}\mid z_{n+2}\geqslant 0\};$$

$$H_-=\{z\in S^{n+1}\mid z_{n+2}\leqslant 0\},$$

且 $S^{n+1}=H_+\cup H_-$ 及 $S^n=H_+\cap H_-$．进一步，投射 $R^{n+2}\to R^{n+1}$ 所定义的投射 p_+: $H_+\to E^{n+1}$ 和 p_-: $H_-\to E^{n+1}$ 为同胚．映射 f: $S(S^n)\to S^{n+1}$ 由

$$f[z, t]=\begin{cases} p_-^{-1}(2tz+(1-2t)p_0) & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ p_+^{-1}((2-2t)z+(2t-1)p_0) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right) \end{cases}$$

所定义，可以验证为一同胚 $f: S(S^n) \approx S^{n+1}$. ∎

对 $n \geqslant 1$，第 n 个同伦群函子 π_n 是在点标空间同伦范畴上的协变函子，由 $\pi_n = \pi_{S^n}$ 定义。从定理 6 和 5 可得出，这些函子取值于群和同态的范畴.

在本章最后两节中，将给出 π_1 的另一个定义，并更详细地加以研究。在第 7 章中我们要回头研究高维的同伦群 π_n.

下述关于映射 $S^n \to X$ 代表 $\pi_n(X)$ 中平凡元素的充分必要条件是定理 1.3.12 的直接结果.

7. 定理 映射 $\alpha: S^n \to X$ 代表 $\pi_n(X)$ 的平凡元素，对 $n \geqslant 1$，当且仅当 α 能连续地扩充到 E^{n+1} 上. ∎

在结束本节之前，让我们考虑一下对于特殊的点标空间 X 和 Y，在集合 $[X; Y]$ 上可能的群构造之间的相互作用（例如，若 X 是 H 上群及 Y 是 H 群，这个集合可用两个方法给出群构造）. 事实上，在相当一般的情况下，在一范畴中 $\hom(X, Y)$ 上的两个合成法则相等，我们来阐述此结果.

8. 定理 设 X 和 Y 是一范畴中的对象，且设 $*$ 和 $*'$ 是 $\hom(X, Y)$ 中两个合成法则，使得

(a) $*$ 和 $*'$ 有共同的双边单位元素；

(b) $*$ 和 $*'$ 是互相分配的.

则 $*$ 和 $*'$ 相等，且两者都是交换与结合的.

证明 条件 (a) 意味着有一映射 $f_0: X \to Y$，使对任意的 $f: X \to Y$，

$$f * f_0 = f_0 * f = f *' f_0 = f_0 *' f = f.$$

条件 (b) 意味着对 $f_1, f_2, g_1, g_2: X \to Y$，

$$(f_1 * f_2) *' (g_1 * g_2) = (f_1 *' g_1) * (f_2 *' g_2).$$

若 $f, g: X \to Y$，则

$$f * g = (f *' f_0) * (f_0 *' g) = (f * f_0) *' (f_0 * g) = f *' g;$$

$$g * f = (f_0 *' g) * (f *' f_0) = (f_0 * f) *' (g * f_0) = f * g.$$

所以 $f * g = f *' g = g * f$. 为证明结合律，我们有

$(f*g)*h=(f*g)*'(f_0*h)=(f*'f_0)*(g*'h)=f*(g*h)$. ▌

9. 推论 若 P 是 H 空间，Q 是任一 H 上群，则 $[Q; P]$ 是交换群且群的构造由 P 的乘法映射所定义。

证明 只要注意到在 $[Q; P]$ 中用 Q 的上乘或 P 的乘法定义的两合成法则满足定理 8 的条件，便可推出此结论. ▌

注意若 P 仅为 H 空间(而非 H 群)，则在 $[X; P]$ 中由 P 的乘法定义的合成法则一般不是 $[X; P]$ 上的群构造. 然而，若 X 是 H 上群(例如同纬映象)，则从推论 9 得出，在 $[X; P]$ 上的这合成法则是群的构造，且在此情况下，在 $[X; P]$ 上的得到的群构造相同，而不管 P 被给出什么乘法映射(只要它是 H 空间).

10. 推论 若 P 是 H 空间，则 $\pi_n(P)$ 对所有 $n\geqslant 1$ 是交换的，且 $\pi_n(P)$ 的群构造由 P 中的乘法映射定义。▌

对于双重同纬映象 $S(SZ)$，其点表成形式 $[[z, t], t']$ (对 $z\in Z$ 及 $t, t'\in I$)，在映射 $S(SZ)\to X$ 的集合中存在两个合成法则. 若 f, g: $S(SZ)\to X$，我们定义

$$(f*g)[[z, t], t']=\begin{cases} f[[z, 2t], t'] & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right) \\ g[[z, 2t-1], t'] & \left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

及
$$(f*'g)[[z, t], t']=\begin{cases} f[[z, t], 2t'] & \left(0\leqslant t'\leqslant\frac{1}{2}\right) \\ g[[z, t], 2t'-1] & \left(\frac{1}{2}\leqslant t'\leqslant 1\right)\end{cases}$$

在 $[S(SZ); X]$ 中相应的运算满足定理 8 的条件. 所以它们相等，且 $[S(SZ); X]$ 是交换群. 特别地，有下述推论.

11. 推论 对 $n\geqslant 2$，π_n 是到交换群范畴的函子. ▌

类似的论证可用于回路空间 ΩP，其中 P 自身为 H 空间. 在 ΩP 中存在乘法映射，因为它是回路空间；且另一乘法由 P 中原来的乘法得到. 在 $[X; \Omega P]$ 中相应的合成法则满足定理 8 的条件. 所以若 P 是 H 空间，则 $\pi^{\Omega P}$ 是到交换群范畴的反变函子.

§7 基本广群

本节涉及拓扑空间中的道路．这导致§1.6引入的第1个同伦群π_1的另一个描述(§1.8)．我们有可能定义在拓扑空间中道路之间的一些同伦．这些同伦是在§1.5中证明回路空间是H空间时所用过的同伦(对于非闭道路)的推广，且由相同的公式定义(除了允许t与t'交换以外)．显然，在将§1.5中仅考虑回路空间所得的结果对道路空间作适当的推广时，有关公式的这种再现可以在证明中省略掉．但每个公式毕竟有其自身的价值；而且，公式的再现有助于对公式的理解．

一个广群是个小范畴，其每个态为等价．我们不加证明地列举出一些关于广群的事实，它们是范畴的一般性质的易得的结果．

1. *在广群的对象A和B之间由条件$\hom(A, B)\neq\emptyset$定义的关系是等价关系．* ▮

这个等价关系的等价类称为*广群的分支*．一个广群称为*连通的*，若它恰有一个分支．

2. *对于广群的任一对象A，把$f, g: A\to A$变为$f\circ g: A\to A$的合成法则是在$\hom(A, A)$内的群运算．* ▮

3. *存在从任一广群到群和同态范畴的协变函子，把对象A变为群$\hom(A, A)$，且把态$f: A\to B$变为同态*

$$h_f: \hom(A, A)\to\hom(B, B),$$

由$h_f(g)=f\circ g\circ f^{-1}$对$g: A\to A$所定义． ▮

因为在广群中任一态$f: A\to B$是等价，所以$h_f: \hom(A, A)\to\hom(B, B)$是同构．下面的命题描述了由取所有可能的态$f: A\to B$得到的同构族．

4. *若A和B在一广群的同一分支中，则同构族$\{h_f|f: A\to B\}$是同构$\hom(A, A)\to\hom(B, B)$的一个共轭类．* ▮

5. *设F是从广群$\mathscr{C}$到另一个广群$\mathscr{C}'$的协变函子．则F映$\mathscr{C}$的一个分支到$\mathscr{C}'$的同一个分支中，且存在从$\mathscr{C}$上的协变函子*

$\hom(A, A)$ 到 $\mathscr{C}$ 上的协变函子 $\hom_{\mathscr{C}}(F(A), F(A))$ 的自然变换 $F_*(A)$*, 由

$$F_*(A)(f) = F(f): F(A) \to F(A),\ f: A \to A$$

所定义. ▌

在完成了关于广群的这些一般考察后，我们进入基本广群的定义. 在拓扑空间 X 中一个**道路** ω 定义为连续映射 $\omega: I \to X$ [注意: 道路是映射而非像集 $\omega(I)$]. 道路的始点为点 $\omega(0)$, 终点为点 $\omega(1)$. 我们也说 ω 是从 $\omega(0)$ 到 $\omega(1)$ 的道路. 在 $x_0 \in X$ 的一个**闭道路**或**回路**是一道路 ω, 使 $\omega(0) = x_0 = \omega(1)$. 若 ω 和 ω' 是 X 的道路, 使 $\operatorname{end}\omega = \operatorname{orig}\omega'$**, 则存在积道路 $\omega * \omega'$ 于 X 中, 由公式

$$(\omega * \omega')(t) = \begin{cases} \omega(2t) & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}\right) \\ \omega'(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\right) \end{cases}$$

所定义, 且 $\operatorname{orig}(\omega * \omega') = \operatorname{orig}\omega$, $\operatorname{end}(\omega * \omega') = \operatorname{end}\omega'$.

我们很想作这么个范畴, 其对象为 X 的点, 其从 x_1 到 x_0 的态是从 x_0 到 x_1 的道路, 且其合成就是积道路. 但在此定义下, 范畴公理没有一个被满足. 亦即: 对每个点不一定有单位态, 对积道路结合律一般不成立[亦即 $\omega * (\omega' * \omega'')$ 通常异于 $(\omega * \omega') * \omega''$]. 然而, 若不把态定义为道路本身, 而定义为道路的同伦类, 则可定义一个范畴.

X 的两个道路 ω 和 ω' 简称为**同伦的**, 记为 $\omega \simeq \omega'$, 若它们相对于 $\dot{I}$ 是同伦的. 这样, $\omega \simeq \omega'$ 的一个必要条件是 $\omega(0) = \omega'(0)$ 且 $\omega(1) = \omega'(1)$. 对任意 $x_0, x_1 \in X$, 关系 $\simeq$ 是从 x_0 到 x_1 的道路集合中的等价关系, 从此得到的等价类称为**道路类**, 且若 ω 是 X 中的道路, 则包含它的道路类记为 $[\omega]$. 因在同一道路类中, 两道路有共同的始点和共同的终点, 所以我们可取来作为道路类的

---

* 按上节的记号, 这两个协变函子应记 $\hom_{\mathscr{A}}(A, \cdot)$ 与 $\hom_{\mathscr{C}}(F(A), F(\cdot))$, 自然变换记作 F_*. ——译注

** 这里 $\operatorname{orig}\omega$ 表示 ω 的始点 $\omega(0)$, $\operatorname{end}\omega$ 表示 ω 的终点 $\omega(1)$. ——译注

始点和终点.

我们构造一个范畴，其对象为 X 的点. 且其从 x_1 到 x_0 的态是以 x_0 为始点以 x_1 为终点的道路类. 以下引理说明两道路之积的道路类仅依赖于因子的道路类，且可用来定义该范畴中的合成.

6. 引理 设$[\omega]$和$[\omega']$是 X 中的道路类，$\mathrm{end}[\omega]=\mathrm{orig}[\omega']$. 则存在一个完全确定的道路类 $[\omega]*[\omega']=[\omega*\omega']$，使 $\mathrm{orig}([\omega]*[\omega'])=\mathrm{orig}[\omega]$，且 $\mathrm{end}([\omega]*[\omega'])=\mathrm{end}[\omega']$.

证明 为证明 $\omega\simeq\omega_1$ 和 $\omega'\simeq\omega_1'$ 蕴涵 $\omega*\omega'\simeq\omega_1*\omega_1'$，设 F: $I\times I\to X$ 是从 ω 到 ω_1 的相对于 $\dot{I}$ 的同伦，且设 F': $I\times I\to X$ 是从 ω' 到 ω_1' 的相对于 $\dot{I}$ 的同伦. 一个同伦 $F*F'$: $I\times I\to X$ 由公式

$$(F*F')(t,\ t')=\begin{cases}F(2t,\ t') & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right)\\ F'(2t-1,\ t') & \left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}\quad (t'\in I)$$

所定义，见图 4 所示意:

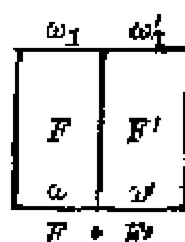


图 4

则 $F*F'$: $\omega*\omega'\simeq\omega_1*\omega_1'$ rel $\dot{I}$. ∎

7. 定理 对每个拓扑空间 X，存在范畴 $\mathscr{P}(X)$，其对象是 X 的点，其从 x_1 到 x_0 的态是以 x_0 为始以 x_1 为终的道路类，其合成是道路类的积.

证明 为证明单位态的存在，设 ε_x: $I\to X$ 是常值映射，对每个 $x\in X$，$\varepsilon_x(I)=x$. 现在说明$[\varepsilon_x]=1_x$. 若 ω 是使 $\omega(1)=x$ 的道路，可以证明 $\omega*\varepsilon_x\simeq\omega$(对于以 x 为始的道路也有类似的性质). 这样的同伦 F: $I\times I\to X$ 由公式

$$F(t,\ t')=\begin{cases}\omega\left(\frac{2t}{t'+1}\right) & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{t'+1}{2}\right)\\ x & \left(\frac{t'+1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}\quad (t'\in I)$$

给出，见图 5 所示意．类似的同伦说明若 $\omega(0)=x$，则 $\varepsilon_x*\omega\sim\omega$。

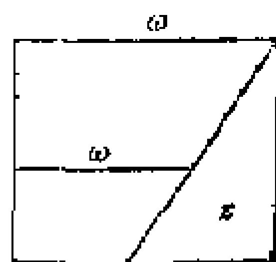


图 5

为证明态的合成的结合律，设 ω、ω' 和 ω'' 是道路，使 $\mathrm{end}\,\omega=\mathrm{orig}\,\omega'$，$\mathrm{end}\,\omega'=\mathrm{orig}\,\omega''$．可以证明 $(\omega*\omega')*\omega''\simeq\omega*(\omega'*\omega'')$．这样的同伦 $G: I\times I\to X$ 由公式

$$G(t,t')=\begin{cases}\omega\left(\dfrac{4t}{t'+1}\right) & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{t'+1}{4}\right)\\ \omega'(4t-t'-1) & \left(\dfrac{t'+1}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{t'+2}{4}\right)\\ \omega''\left(\dfrac{4t-2-t'}{2-t'}\right) & \left(\dfrac{t'+2}{4}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

所给出，见图 6 所示意．▌

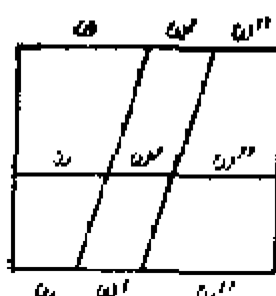


图 6

范畴 $\mathscr{P}(X)$ 称为 X 的道路类范畴，或 X 的基本广群，后一名称基于下述定理：

8．定理 $\mathscr{P}(X)$ 是一个广群．

证明 在 X 中给定一道路 ω，令 $\omega^{-1}: I\to X$ 是道路，由 $\omega^{-1}(t)=\omega(1-t)$ 定义．为证明 $[\omega^{-1}]=[\omega]^{-1}$ 在 $\mathscr{P}(X)$ 中，我们必须指出 $\omega*\omega^{-1}\simeq\varepsilon_{\omega(0)}$［且也同样有 $\omega^{-1}*\omega\sim\varepsilon_{\omega(1)}$，但它由前面的同伦给出，因为 $\omega=(\omega^{-1})^{-1}$］．这样的同伦 $H: I\times I\to X$ 由公式

$$H(t,t')=\begin{cases}\omega(0) & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{t'}{2}\right)\\ \omega(2t-t') & \left(\dfrac{t'}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right)\\ \omega(2-2t-t') & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1-\dfrac{t'}{2}\right)\\ \omega(0) & \left(1-\dfrac{t'}{2}\leqslant t\leqslant 1\right)\end{cases}$$

所定义，见图 7 所示意．▌

这样，我们就完成了对基本广群的构造．基本广群的分支称

为 X 的道路分支. 显然, x_0 和 x_1 在 X 的同一分支中, 当且仅当 X 中存在从 x_0 到 x_1 的道路 ω. X 称为道路连通的, 若其基本广群是连通的. 下述定理是道路分支的一交错特征.

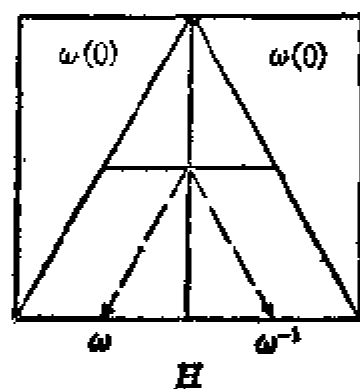


图 7

9. 定理 X 的道路分支是 X 的极大的道路连通子空间.

证明 设 A 是 X 的道路分支, 且 ω 是 X 的一道路, 使 $\omega(0)\in A$. 我们来证明 ω 是 A 中的道路. 对每 $t\in I$ 由 $\omega_t(t')=\omega(tt')$ (对 $t'\in I$) 定义道路 $\omega_t: I\to X$. 则 ω_t 是 X 中从 $\omega(0)$ 到 $\omega(t)$ 的道路. 所以 $\omega(t)$ 是在 x_0 的 X 中同一道路分支中, 也就是 A 中. 因为这对每 $t\in I$ 皆如此, 故 ω 是 A 中的道路.

A 是道路连通的, 因为若 x_0、$x_1\in A$, 则存在 X 中从 x_0 到 x_1 的道路 ω. 由上述结果, ω 是 A 中的道路. 所以 A 的任两点能在 A 中由道路联接起来, 即 A 是道路连通的. 因为 X 中任意从 A 中出发的道路整个位于 A 中, 所以 A 是 X 的极大道路连通子集. ▌

10. 引理 道路连通空间是连通的.

证明 若 ω 是 X 中的道路, 则作为连通空间 I 的连续像 $\omega(I)$ 是连通的. 所以 $\omega(0)$ 和 $\omega(1)$ 在 X 的同一分支中. 若 X 道路连通, X 的任意两点处于同一分支中, 则 X 是连通的. ▌

引理 10 的逆命题不真, 这可由下例说明:

11. 例 设 X 是 R^2 的子空间, 由

$$X=\left\{(x,\ y)\in R^2 \mid x>0,\ y=\sin\frac{1}{x};\ 或\ x=0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\right\}$$

所确定. 则 X 是连通的, 但非道路连通.

给定映射 $f: X\to Y$, 则有从 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{P}(Y)$ 的协变函子 f_*, 把 $\mathscr{P}(X)$ 的对象 x 变到 $\mathscr{P}(Y)$ 的对象 $f(x)$, 把 $\mathscr{P}(X)$ 的态 $[\omega]$ 变到 $\mathscr{P}(Y)$ 的态 $f_*[\omega]=[f\circ\omega]$. f_* 的函子性质是不难验证的. 从命题 5 的第一部分, 或者由直接验证可知, f 映 X 的一个道路分

支到Y的一个道路分支中. 所以有一个从拓扑空间和连续映射的范畴到集合与函数的范畴的协变函子π_0, 使$\pi_0(X)$等于X的道路分支的集合, 且

$$\pi_0(f)=f_{\#}: \pi_0(X)\to\pi_0(Y)$$

映X中x的道路分支到Y中$f(x)$的道路分支. 若$F: f_0\simeq f_1$, 则对任意$x\in X$存在Y中从$f_0(x)$到$f_1(x)$的道路ω_x, 由$\omega_x(t)=F(x, t)$(对$t\in I$)定义. 所以$f_0(x)$和$f_1(x)$属于Y的同一个道路分支, 且$f_{0\#}=f_{1\#}$. 从而, π_0可视为从同伦范畴到集合和函数范畴的协变函子. 对可缩空间X, 这函子示性函子π_X如下:

12 定理 若X是可缩空间, 则π_X和π_0是在同伦范畴上自然等价的.

证明 若X和X'有相同伦型, 则π_X和$\pi_{X'}$是自然等价的. 从推论1.3.11得出若P是单点空间, π_X自然等价于π_P. 所以只要证明π_P自然等价于π_0即可*). $\pi_0(P)$由P的唯一道路分支组成, 且自然变换

$$\psi: \pi_P\to\pi_0$$

由$\psi[f]=f_{\#}(P)$对$[f]\in[P; X]$所定义, 使同伦$P\times I\to X$对应于道路$I\to X$, 则X^P是一一对应于X的, 从而ψ是自然等价. ∎

函子π_0与例1.2.6的函子H_0密切相关. 事实上, 对于其分支与道路分支重合的空间X, H_0是π_0与把任意集合变为由这集合生成的交换群的协变函子的合成. 特别地, π_0可用来得出§1.2中原来由用H_0得到的结果.

§8 基 本 群

选定点$x_0\in X$, 并考虑X中以x_0为始和终的道路类可得到称为基本群的一个群. 现在说明该群自然等价于§1.6中定义的

---

*) 两个协变函子之间存在从一个到另一个的自然等价, 则称它们是自然等价的, 或一个自然等价于另一个. 这里用到的传递性是显然的. ——译注

第一个同伦群 π_1. 本节以计算圆的基本群作为结束.

设 X 是拓扑空间且 $x_0\in X$. 把 X 的基于 x_0 的基本群记作 $\pi(X, x_0)$, 定义为以 x_0 为始和终的道路类的群. 从定理 1.7.8 和命题 1.7.2 得出这是一个群, 且若 f: $(X, x_0)\to(Y, y_0)$, 则 $f_\#$ 是从 $\pi(X, x_0)$ 到 $\pi(Y, y_0)$ 的同态. 若 f, f': $(X, x_0)\to(Y, y_0)$ 同伦, 则

$$f_\#=f'_\#: \pi(X, x_0)\to\pi(Y, y_0).$$

所以有下述定理.

1. 定理 *存在从点标空间的同伦范畴到群范畴的协变函子, 把点标空间变到其基本群, 且把映射 f 变为同态 $f_\#$**). ∎

我们来说明基本群函子 π 自然等价于 §1.6 定义的 π_1. 设 λ: $I\to S(S^0)$ 由 $\lambda(t)=[-1, t]$ 所定义, 其中 S^0 由 -1 和 1 两点组成, 且 1 为其基点. 则 λ 诱导出在映射 $(S(S^0), 1)\to(X, x_0)$ 的同伦类和 X 中在 x_0 的闭道路的道路类之间的双映 $\lambda^\#$, 由

$$\lambda^\#[g]=[g\lambda], \ g: \ (S(S^0), 1)\to(X, x_0)$$

所定义. 根据在 $[S(S^0); X]$ 中和 $\pi(X, x_0)$ 中的合成法则的定义, $\lambda^\#$ 可视为群的同构. 给定一映射 f: $(X, x_0)\to(Y, y_0)$, $\lambda^\#$ 与 $f_\#$ 可交换. 由引理 1.6.6, $S(S^0)$ 同胚于 S^1.

2. 定理 *映射 $\lambda^\#$ 是第一个同伦群函子 π_1 与基本群函子 π 的自然等价.* ∎

有时把 $\pi(X, x_0)$ 的元素视为映射 $(S^1, p_0)\to(X, x_0)$ 的同伦类比道路类将更为方便.

因为在 x_0 的任意闭道路(及在这些道路之间的任意同伦)必须全位于 X 中包含 x_0 的道路分支 A 中, 于是 $\pi(A, x_0)\approx\pi(X, x_0)$. 从而, 基本群能够给出的仅是包含 x_0 的道路分支的信息. 从一般的广群的角度来考虑(见命题 1.7.3 和 1.7.4), 若 $[\omega]$ 是 X 的从 x_0 到 x_1 的道路类, 则 $h_{[\omega]}$ 是从 $\pi(X, x_1)$ 到 $\pi(X, x_0)$ 的同构.

3. 定理 *一个道路连通空间的不同基点的基本群是同构的,*

---

* 应该是把 f 的同伦类变为 $f_\#$. ——译注

此同构在典范的意义下完全决定. ∎

尽管一个道路连通空间基于不同点的基本群是同构的，我们仍不能将它们等同起来，因为它们之间的同构并不唯一. 若在一些点(从而在所有点)的基本群是交换的，则此同构唯一. 一般来说，基本群并非必须是交换的；然而，定理2和推论1.6.10的下述结果是关于基本群交换性的一般结果.

4. 定理 道路连通的H空间的基本群是交换的，且若ω和ω'是在其基点上的闭道路，则

$$[\omega]*[\omega']=[\mu\circ(\omega,\omega')],$$

其中μ是H空间中的乘法映射. ∎

空间X对$n\geqslant 0$称为是n连通的，若对$k\leqslant n$每个连续映射$f: S^k\to X$有在E^{k+1}上的连续扩充. 1连通的空间也称为单连通的. 注意若$0\leqslant m\leqslant n$，则n连通空间也是m连通的. 从定理1.6.7推出，空间X是n连通的，当且仅当它是道路连通的，且$\pi_k(X, x)$是平凡的，对每个基点$x\in X$及$1\leqslant k\leqslant n$. 从推论1.3.13，有下述结果.

5. 引理 可缩空间是n连通的，对每个$n\geqslant 0$. ∎

注意，一空间是0连通的，当且仅当它是道路连通的；一空间是单连通的，当且仅当它是道路连通的，且$\pi(X, x_0)=0$[对某个点(从而所有点)$x_0\in X$].

从定理1我们知道，若两个点标空间有作为点标空间的相同伦型，则有同构的基本群. 为了证明两个道路连通空间有作为空间(不要基点条件)的相同伦型时的类似结果，我们需要一些预备的结果.

6. 引理 设$h: I\times I\to X$，α_0, α_1, β_0, β_1是X的道路，由限制h于$I\times I$的四条边来定义[即$\alpha_i(t)=h(i, t)$及$\beta_i(t)=h(t, i)$]. 则$(\alpha_0*\beta_1)*(\alpha_1^{-1}*\beta_0^{-1})$是$X$中在$h(0, 0)$的闭道路，它代表$\pi(X, h(0, 0))$的平凡元素.

证明 设α_0', α_1', β_0'和β_1'是$I\times I$的道路，由$\alpha_i'(t)=(i, t)$和$\beta_i'(t)=(t, i)$定义. 则$(\alpha_0'*\beta_1')*(\alpha_1'^{-1}*\beta_0'^{-1})$是$I\times I$的在$(0,0)$

的闭道路，且 h 映此闭道路于 $(\alpha_0*\beta_1)*(\alpha_1^{-1}*\beta_0^{-1})$ [*]. 因为 $I\times I$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的凸子集，所以它是可缩的，且由引理5，它是单连通的. 所以

$$(\alpha_0'*\beta_1)*(\alpha_1'^{-1}*\beta_0'^{-1})\simeq\varepsilon_{(0,0)},$$

且

$$(\alpha_0*\beta_1)*(\alpha_1^{-1}*\beta_0^{-1})=h\circ((\alpha_0'*\beta_1')*(\alpha_1'^{-1}*\beta_0'^{-1}))$$
$$\simeq h\circ\varepsilon_{(0,0)}=\varepsilon_{h(0,0)}. \blacksquare$$

7. 定理 设 f: $(X, x_0)\to(Y, y_0)$ 及 g: $(X, x_0)\to(Y, y_1)$ 作为 X 到 Y 的映射是同伦的，则在 Y 中有从 y_0 到 y_1 的道路 ω，使

$$f_*=h_\omega\circ g_*: \ \pi(X, x_0)\to\pi(Y, y_0).$$

证明 设 F: $X\times I\to Y$ 是从 f 到 g 的同伦，且设 ω: $I\to Y$ 由 $\omega(t)=F(x_0, t)$ 定义. 则 ω 是 Y 中从 y_0 到 y_1 的一道路. 若 ω' 是 X 中在 x_0 的任一闭道路，令 h: $I\times I\to Y$ 由 $h(t, t')=F(\omega'(t), t')$ 定义. 则 $h(0, t')=F(x_0, t')=\omega(t')$, $h(t, 1)=g\omega'(t)$, $h(1, t')=\omega(t')$, 且 $h(t, 0)=f\omega'(t)$. 由引理6，有

$$(\omega*g\omega')*(\omega^{-1}*(f\omega')^{-1})\simeq\varepsilon_{y_0}.$$

这蕴涵 $[\omega]\circ g_*[\omega']\circ[\omega]^{-1}=f_*[\omega']$ [**]，亦即

$$(h_{[\omega]}\circ g_*)[\omega']=f_*[\omega'].$$

因为 $[\omega']$ 是 $\pi(X, x_0)$ 的任意取的元素，所以 $h_{[\omega]}\circ g_*=f_*$. $\blacksquare$

8. 定理 相同伦型的两个道路连通空间有同构的基本群.

证明 设 f: $X\to Y$ 和 g: $Y\to X$ 为互逆的同伦等价. 设 $x_0\in X$，记 $y_0=f(x_0)$, $x_1=g(y_0)$, $y_1=f(x_1)$. 设 f_0: $(X, x_0)\to(Y, y_0)$ 和 f_1: $(X, x_1)\to(Y, y_1)$ 是由 f 确定的映射（亦即：f_0 和 f_1 是两个等于 f 但视为偶的映射），且设 g': $(Y, y_0)\to(X, x_1)$ 由 g 确定. 则 $g'\circ f_0$: $(X, x_0)\to(X, x_1)$ 是作为 X 到 X 的映射同伦于 $1_{(X,x_0)}$: $(X, x_0)\subset(X, x_0)$ 的，且 $f_1\circ g'$: $(Y, y_0)\to(Y, y_1)$ 是作为 Y 到 Y 的映射同伦于 $1_{(Y,y_0)}$: $(Y, y_0)\subset(Y, y_0)$ 的. 从定

---

[*] 应说，$h_\#$ 映此闭道路于 $(\alpha_0*\beta_1)*(\alpha_1^{-1}*\beta_0^{-1})$；或说，$h$ 与此闭道路的合成是 $(\alpha_0*\beta_1)*(\alpha_1^{-1}*\beta_0^{-1})$. ——译注

[**] 本节并未对道路类的合成运算规定记号. 这里即使用了"$\circ$"，但在同一个定理中，又用此记号表示同态的合成. 请阅读时注意区分. ——译注

理7推出存在 X 中从 x_1 到 x_0 的道路 ω 和 Y 中从 y_1 到 y_0 的道路 ω'，使得

$$h_{[\omega]}=(g'\circ f_0)_{\#}=g_{\#}'\circ f_{0\#}',$$
$$h_{[\omega']}=(f_1\circ g')_{\#}=f_{1\#}\circ g_{\#}'.$$

所以有交换图表

$$\begin{array}{ccc}\pi(X,x_0) & \xrightarrow{h_{[\omega]}} & \pi(X,x_1)\\ {\scriptstyle f_{0\#}}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle g_{\#}'} & \downarrow{\scriptstyle f_{1\#}}\\ \pi(Y,y_0) & \xrightarrow{h_{[\omega']}} & \pi(Y,y_1).\end{array}$$

$g_{\#}'$ 是满同态，因 $h_{[\omega]}$ 是满同态；$g_{\#}'$ 是单同态，因为 $h_{[\omega']}$ 是单同态，所以 $g_{\#}'$ 是同构. ∎

我们以一个有非平凡基本群的空间的例子作为结束. 为此目的，我们沿用 Tucker 用过的方法计算 $\pi(S^1, p_0)$，这里 $S^1=\{e^{i\theta}\}$ 及 $p_0=1$[*].

指数映射 $ex: \boldsymbol{R}\to S^1$ 由 $ex(t)=e^{2\pi it}$ 定义. 则 ex 是连续的，$ex(t_1+t_2)=ex(t_1)ex(t_2)$（其中，右端为复数的乘法）；且 $ex(t_1)=ex(t_2)$，当且仅当 t_1-t_2 是整数. 则有 $ex\left|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right.$ 将开线段 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 同胚于 $S^1-\{e^{\pi i}\}$. 我们令

$$\lg: S^1-\{e^{\pi i}\}\to\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

为 $ex\left|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right.$ 的逆.

子集 $X\subset\boldsymbol{R}^n$ 称为从点 $x_0\in X$ 的星形，如果对任意 $x\in X$，从 x_0 到 x 的闭线段 $[x_0, x]$ 整个在 X 里边面.

9. 引理 设 X 是紧致的，且为从 $x_0\in X$ 的星形. 任给连续映射 $f: X\to S^1$ 和任意 $t_0\in\boldsymbol{R}$，使 $ex(t_0)=f(x_0)$，则存在连续映射 $f': X\to\boldsymbol{R}$，使 $f'(x_0)=t_0$ 且 $ex(f'(x))=f(x)$（对所有 $x\in X$）.

[*] C. A. W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, *Proceedings of the Canadian Mathematical Congress*, 1945, 285—309. —原注

证明 显然，我们能够移动 X 使之成为从原点的类星形；从而可假设 $x_0=0$ 而不失一般性．因为 X 紧致的，故 f 是一致连续的，且存在 $\varepsilon>0$ 使若 $\|x-x'\|<\varepsilon$，则 $\|f(x)-f(x')\|<2$［亦即：$f(x)$ 和 $f(x')$ 不是 S^1 中的对径点］．因为 X 有界，故存在正整数 n 使 $\|x\|/n<\varepsilon$（对所有 $x\in X$）．则对每个 j 使 $0\leqslant j<n$ 及所有 $x\in X$，有

$$\left\|\frac{(j+1)x}{n}-\frac{jx}{n}\right\|=\frac{\|x\|}{n}<\varepsilon,$$

且从而
$$\left\|f\left(\frac{(j+1)x}{n}\right)-f\left(\frac{jx}{n}\right)\right\|<2.$$

由是，商 $f((j+1)x/n)/f(jx/n)$ 是 $S^1-\{e^{\pi i}\}$ 的一个点．设 g_j: $X\to S^1-\{e^{\pi i}\}$ 对 $0\leqslant j<n$ 是映射，由

$$g_j(x)=f((j+1)x/n)/f(jx/n)$$

给出．则对所有 $x\in X$，我们看到

$$f(x)=f(0)g_0(x)g_1(x)\cdots g_{n-1}(x).$$

我们定义 f': $X\to\boldsymbol{R}$，由

$$f'(x)=t_0+\lg(g_0(x))+\lg(g_1(x))+\cdots+\lg(g_{n-1}(x)),$$

f' 是从 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的 $n+1$ 个连续函数的和，因而连续．显然，$f'(0)=t_0$，且 $ex(f'(x))=f(x)$． ▌

10．引理 设 X 是连通空间，且设 f'，g': $X\to\boldsymbol{R}$ 是映射，使 $ex\circ f'=ex\circ g'$ 及 $f'(x_0)=g'(x_0)$（对某个 $x_0\in X$）．则 $f'=g'$．

证明 设 $h=f'-g'$: $X\to\boldsymbol{R}$．因 $ex\circ f'=ex\circ g'$，所以 $ex\circ h$ 是从 X 到 p_0 的常值映射．故 h 是从 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的连续映射，仅取整数值．因为 X 连通，所以 h 为常值映射．又因 $h(x_0)=0$，则对所有 $x\in X$，$h(x)=0$． ▌

设 α: $I\to S^1$ 是在 p_0 处的闭道路．因为 I 是从 0 的类星形，且 $\alpha(0)=p_0=ex(0)$，则从引理 9 得出，存在 α': $I\to\boldsymbol{R}$，使 $\alpha'(0)=0$，且 $ex\circ\alpha'=\alpha$．由引理 10，α' 由这些性质所唯一示性．因为 $ex(\alpha'(1))=p_0$，故 $\alpha'(1)$ 是一整数．我们定义 α 的度数 $\deg\alpha=\alpha'(1)$．

11．引理 设 α 和 β 是 S^1 中在 p_0 处的同伦的闭道路，则

$$\deg\alpha=\deg\beta.$$

证明 设 F: $I\times I\to S^1$ 是从 α 到 β 的相对于 $\dot{I}$ 的同伦. 因为 $I\times I$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的从 $(0, 0)$ 的类星形子集，故从引理 9，存在映射 F': $I\times I\to\boldsymbol{R}$，使得 $F'(0, 0)=0$ 及 $ex\circ F'=F$. 因 F 是一相对于 $\dot{I}$ 的同伦，$F(0, t')=F(1, t')=p_0$(对所有 $t\in I$). 所以 $F'(0, t')$ 和 $F'(1, t')$ 对所有 $t'\in I$ 仅取整数值. 则 $F'(0, t')$ 必为常值映射，且 $F'(1, t')$ 也必为常值映射. 因为 $F'(0, 0)=0$，所以 $F'(0, t')=0$ (对所有 $t'\in I$). 定义 α', β': $I\to\boldsymbol{R}$ 由 $\alpha'(t)=F'(t, 0)$ 和 $\beta'(t)=F'(t, 1)$. 则 $\alpha'(0)=0$ 和 $ex\circ\alpha'=\alpha$. 所以 $\deg\alpha=\alpha'(1)=F'(1, 0)$. 类似地，$\beta'(0)=0$ 和 $ex\circ\beta'=\beta$，从而 $\deg\beta=\beta'(1)=F'(1, 1)$. 因为 $F'(1, t')$ 是常值，所以 $F'(1, 0)=F'(1, 1)$，且 $\deg\alpha=\deg\beta$. ▮

这样就有完全确定了的从 $\pi(S^1, p_0)$ 到 $\boldsymbol{Z}$ 的函数 deg，由

$$\deg[\alpha]=\deg\alpha$$

所定义，其中 α 是 S^1 中在 p_0 处的闭道路.

12. 定理 *函数 deg 是同构*:

$$\deg\colon\ \pi(S^1, p_0)\approx\boldsymbol{Z}.$$

证明 为证明 deg 是同态，设 α 和 β 是 S^1 中在 p_0 的两个闭道路，且设 $\alpha\beta$ 是在 S^1 的群乘法中确定的闭道路. 我们从定理 4 知道，$[\alpha]*[\beta]=[\alpha\beta]$. 设 α'、β': $I\to\boldsymbol{R}$ 是使 $\alpha'(0)=0$, $ex\circ\alpha'=\alpha$, $\beta'(0)=0$ 和 $ex\circ\beta'=\beta$ 的映射. 则 $\alpha'+\beta'$: $I\to\boldsymbol{R}$ 是使

$$(\alpha'+\beta')(0)=0$$

及 $ex\circ(\alpha'+\beta')=\alpha\beta$ 的，所以

$$\begin{aligned}\deg([\alpha]*[\beta])&=\deg[\alpha\beta]=(\alpha'+\beta')(1)\\&=\deg\alpha+\deg\beta=\deg[\alpha]+\deg[\beta],\end{aligned}$$

说明了 deg 是同态.

映射 deg 是满同态：因为若 n 是一个整数，则存在 $\boldsymbol{R}$ 中的道路 α_n'，由 $\alpha_n'(t)=tn$ 定义. 设 $\alpha_n=ex\circ\alpha_n'$. 则显然，$\deg[\alpha_n]=\alpha_n'(1)=n$.

映射 deg 是单同态：因为若 $\deg[\alpha]=0$，则在 0 处存在 $\boldsymbol{R}$ 中

的闭道路 α'，使 $ex\circ\alpha'=\alpha$. 因 $\boldsymbol{R}$ 是单连通的(因为它可缩，由引理5得出)，故 $\alpha'\sim\varepsilon_0$，则 $ex\circ\alpha'\simeq\varepsilon_{p_0}$. 所以 $\alpha\simeq\varepsilon_{p_0}$，且 $[\alpha]$ 是 $\pi(S^1,p_0)$ 的单位元素. ▮

我们计算 $\pi(S^1, p_0)$ 所用的方法将在第2章中推广，用来给出在一空间的基本群和它的覆叠空间的基本群之间的关系.

从定理2得出，$\pi(S^1, p_0)\approx[S^1, p_0; S^1, p_0]$. 因为 S^1 是拓扑群，集合 $[S^1; S^1]$ (不带基点条件)在映射乘法下也是群，且存在明显的同态

$$\gamma: [S^1, p_0; S^1, p_0]\to[S^1; S^1].$$

13. 引理 同态 $\gamma: [S^1, p_0; S^1, p_0]\to[S^1; S^1]$ 是同构.

证明 为说明 γ 是满同态，设 $f: S^1\to S^1$ 且设 $f(p_0)=e^{i\theta}$ (对某个 θ, $0\leqslant\theta<2\pi$). 定义同伦 $F: S^1\times I\to S^1$，由

$$F(z, t)=f(z)e^{-it\theta}.$$

则 F 是从 f 到一映射 f' 的同伦，使 $f'(p_0)=p_0$. 所以 $\gamma[f']_{p_0}=[f']=[f]$.

为说明 γ 是单同态，设 $f: (S^1, p_0)\to(S^1, p_0)$ 是使 $\gamma[f]_{p_0}=[f]$ 为平凡元素的. 则 $f: S^1\to S^1$ 是零伦的. 由定理1.3.12，f 是相对于 p_0 零伦的. 所以 $[f]_{p_0}$ 是平凡元素. ▮

从定理12和引理13得出 $[S^1; S^1]\approx\boldsymbol{Z}$. 对每个整数 n，从 S^1 到自身的映射 $z\to z^n$ 代表在上述同构下对应于 n 的同伦类.

第 1 章 习题

A 可缩空间

1. 拓扑空间 X 上以 v 为顶点的锥形定义为常值映射 $X\to v$ 的映射柱. 证明 X 可缩当且仅当它是 X 上任意锥形的收缩核.
2. 证明 S^n 是 E^{n+1} 的收缩核，当且仅当 S^n 是可缩的*).
3. 若 CX 是 X 上的一锥形，证明(CX, X)相对于任意空间有同伦扩充性质.
4. 证明一空间 Y 可缩，当且仅当任给关于 Y 有同伦扩充性质的偶(X, A)及任意映射 $f: A\to Y$, f 总可以扩充到 X 上.
5. 设 Y 是例 1.3.9 的梳空间，且设 y_0 是点$(0, 1)\in Y$. 设 Y' 是 Y 的另一个模型带有相应的点 y_0'. 设 X 是空间，由 Y 和 Y' 的分离并叠合 y_0 和 y_0' 而得. 证明 X 是 n 连通的、对任意 n, 但是不可缩[提示. X 在自身内任一形变必须是相对于 y_0 的同伦].

B 附加空间

1. 设 A 是空间 X 的子空间，且设 $f: A\to Y$ 是连续映射. X 的由 f 到 Y 的附加空间 Z 定义为 X 和 Y 的分离并在等同 $x\in A$ 与 $f(x)\in Y$ (对所有 $x\in A$) 而得到的商空间. 证明若 Y 是正规空间且 A 是 X 的闭子集，则 Z 是正规空间.
2. 空间 X 称双正规的，若 $X\times I$ 是正规空间. 若 X 是双正规空间，Y 是正规空间，且 $f: X\to Y$ 是连续的，证明 f 的映射柱是正规空间.
3. 给定一连续映射 $f: A\to Y$, 其中 A 是空间 X 的子空间，证明 f 可扩充到 X 上，当且仅当 Y 是 X 的由 f 到 Y 的附加空间的收缩核.
4. 设 Z 是 X 的由映射 $f: A\to Y$ 的到 Y 的附加空间. 证明(Z, Y)关于空间 W 有同伦扩充性质，若(X, A)关于 W 有同伦扩充性质.

C 绝对收缩核和绝对邻域收缩核

空间 Y 称为绝对收缩核(或绝对邻域收缩核), 若给出正规空间 X, 闭子集 $A\subset X$ 及连续映射 $f: A\to Y$, 则 f 可扩充到 X 上(或 A 在 X 的某邻

---

*) 事实上，二者都不成立. ——译注

域)。

1. 证明一正规空间 Y 是绝对收缩核(或绝对邻域收缩核),当且仅当只要 Y 作为闭子集嵌入正规空间 Z 时,就有 Y 是 Z 的收缩核(或 Y 在 Z 中某邻域的收缩核)。
2. 证明任意多个绝对收缩核的积(或有限多个绝对邻域收缩核的积)本身也是绝对收缩核(或绝对邻域收缩核)。
3. 证明对所有 n, R^n 是绝对收缩核。
4. 证明绝对收缩核的收缩核是绝对收缩核,绝对邻域收缩核的某开子集的收缩核是绝对邻域收缩核。
5. 证明对所有的 n, E^n 是绝对收缩核, S^n 是绝对邻域收缩核。
6. 证明双正规绝对邻域收缩核是局部可缩的(亦即:点 x 的任一邻域 U 包含 x 的一个邻域 V 在 U 中可形变到 x)。
7. 证明双正规绝对邻域收缩核是绝对收缩核,当且仅当它可缩。

D 同伦扩充性质

1. 设 A 是正规空间 X 的闭子集,设 $f: X\to Y$ 是连续的(其中 Y 是任意的),且设 $g: A\times I\to Y$ 是 $f|A$ 的一个同伦。若存在 $f|U$ 的同伦 G': $U\times I\to Y$ 是 G 的扩充,其中 U 是 A 的开邻域,证明存在 f 的同伦 $F: X\times I\to Y$ 扩充 G。
2. **Borsuk 同伦扩充定理** 设 A 是双正规空间 X 的闭子集,则 (X, A) 对任意绝对邻域收缩核 Y 有同伦扩充性质。
3. 设 A 是双正规空间 X 的闭子集,且设子空间 $A\times I\cup X\times 0\subset X\times I$ 是绝对邻域收缩核。则 (X, A) 关于任意空间 Y 有同伦扩充性质。
4. 设 A 是 X 的闭子集, B 是 Y 的开子集。假设 (X, A) 关于 B 有同伦扩充性质,且 $(X\times I, X\times \dot{I}\cup A\times I)$ 关于 Y 有同伦扩充性质。证明若 $f: (X, A)\to(Y, B)$ (作为偶的映射)同伦于一个将 X 整个映入 B 的映射,则它相对于 A 同伦于该映射。

E 上纤维化

1. 证明任意上纤维化是单函数。
2. 证明上纤维化的合成是上纤维化。
3. 对 X 的闭子空间 A,证明包含映射 $A\subset X$ 是上纤维化,当且仅当 $X\times 0\cup A\times I$ 是 $X\times I$ 的收缩核。
4. 若 A 是 Hausdorff 空间 X 的子空间,证明若 $A\subset X$ 是上纤维化,则 A 在 X 中是闭的。
5. 设 X 是闭子集 X_1 和 X_2 的并, A 是 X 的子集,使 $X_1\cap X_2\subset A$。证明若

$A\cap X_1\subset X_1$ 与 $A\cap X_2\subset X_2$ 是上纤维化，则 $A\subset X$ 也是上纤维化。

6. 若 A 是空间 X 的闭子空间。证明下列各条是等价的：*)

(a) $A\subset X$ 是上纤维化。

(b) 存在形变 $D: X\times I\to X$ rel A[亦即，$D(x, 0)=x$, $D(a, t)=a$, 对 $x\in X$, $a\in A$ 及 $t\in I$]和映射 $\varphi: X\to I$, 使 $A=\varphi^{-1}(1)$ 和 $D(\varphi^{-1}(0, 1]\times 1)\subset A$。

(c) 存在 A 的邻域 U 在 X 中可形变入 A rel A [亦即：存在同伦 $H: U\times I\to X$ 使 $H(x, 0)=x$, $H(a, t)=a$ 和 $H(x, 1)\in A$, 对 $x\in U$, $a\in A$ 及 $t\in I$] 和映射 $\varphi: X\to I$, 使得 $A=\varphi^{-1}(1)$ 和 $\varphi(x)=0$, 若 $x\in X-U$。

7. 若 $A\subset X$ 及 $B\subset Y$ 是上纤维化，且 A 和 B 分别在 X 和 Y 中是闭的，证明 $A\times B\subset X\times B\cup A\times Y$ 和 $X\times B\cup A\times Y\subset X\times Y$ 是上纤维化。

F 局部体系**)

1. 在空间 X 上的一局部体系是从 X 的基本广群到某范畴的协变函子、对任意范畴 $\mathscr{C}$, 证明存在 X 上取值于 $\mathscr{C}$ 的局部体系的范畴(X 上两个局部体系称为等价的，若在这范畴中它们是等价的对象)。

2. 给定一映射 $f: X\to Y$, 证明 f 诱导出从 Y 上取值于 $\mathscr{C}$ 的局部体系范畴到 X 上取值于 $\mathscr{C}$ 的局部体系范畴的协变函子。

3. 若 A 是范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象，记 Aut A 是 A 在 $\mathscr{C}$ 中的自等价群。若 $\varphi: A\approx B$ 是 $\mathscr{C}$ 中的等价，证明 $\bar{\varphi}$: Aut $A\to$ Aut B 由 $\bar{\varphi}(\alpha)=\varphi\circ\alpha\circ\varphi^{-1}$ 定义，是群的同构。

4. 若 Γ 是 X 上的局部体系，且 $x_0\in X$, 证明 Γ 诱导出一同态：

$$\Gamma_{x_0}: \pi(X, x_0)\to \mathrm{Aut}\,\Gamma(x_0).$$

5. 若 X 是道路连通的，证明 X 上取值于 $\mathscr{C}$ 的两局部体系 Γ 和 Γ' 等价，当且仅当存在等价 $\varphi: \Gamma(x_0)\approx\Gamma'(x_0)$, 使 $\bar{\varphi}\circ\Gamma_{x_0}$ 在 Aut $\Gamma'(x_0)$ 中共轭于 Γ'_{x_0}。

6. 若 X 是道路连通的，给定对象 $A\subset\mathscr{C}$ 和同态 $\alpha: \pi(X, x_0)\to$ Aut A, 证明存在 X 上取值于 $\mathscr{C}$ 的局部体系 Γ, 使 $\Gamma(x_0)=A$, 且 $\Gamma_{x_0}=\alpha$。

G 基本群

---

*) 若 X 是正规的，(a) 和 (c) 的等价性在下述文章中证明：G. S. Young: A condition for the absolute homotopy extension property, *Amer. Math. Monthly* Vol. 71, 896~897, 1964. ——原注

** 见 N. E. Steenrod: Homology with local coefficients *Ann. of Math.*, Vol. 44, 610~627, 1943. ——原注

1. 证明基本群函子与直积交换.

2. 若 ω 和 ω' 是 X 中从 x_0 到 x_1 的道路，证明 $\omega\sim\omega'$ 当且仅当 $\omega*\omega'^{-1}\sim e_{x_0}$.

3. 设空间 X 是两个开单连通子集 U 和 V 的并，使 $U\cap V$ 非空且道路连通. 证明 X 是单连通的.

4. 证明对于 $n\geqslant 2$ S^n 是单连通的.

5. 若存在一带有非交换基本群的空间，证明"数字8"(亦即有一公共点的两圆的并)有非交换的基本群(见习题 2.B.4).

6. 设 $f: I\to R^2$ 是平面上连续可微的单闭曲线，具有无处退化的切向量[亦即：$f(0)=f(1)$，$f'(0)=f'(1)$ 且 $f'(t)\neq 0$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$]. 设 $\omega: I\to S^1$ 是闭道路由 $\omega(t)=f'(t)/|f'(t)|$ 定义. 证明 $[\omega]$ 是 $\pi_1(S^1)$ 的生成元*).

7. 在 R^2 中，设 X 是由圆 C_n 的并组成的空间，其中 C_n 有圆心 $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ 及半径 $\frac{1}{n}$ (对所有正整数 n). 在 R^3 中(把 R^2 做为平面 $x_3=0$ 嵌入之)，设 Y 是联接 $(0, 0, 1)$ 与 X 的闭线段的点集，且设 Y' 是 Y 通过 R^3 的原点的反射. 则 Y 和 Y' 是 R^3 的闭单连通子集，使 $Y\cap Y'$ 是个单点. 证明 $Y\cup Y'$ 不是单连通的**).

H 基本群的一些应用

1. 证明 S^1 不是 E^2 的收缩核.

2. 证明对 $n\geqslant 2$，S^1 与 S^n 不具有相同伦型.

3. 证明对 $n>2$，R^2 和 R^n 不同胚.

4. 设 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是首项系数为1的复系数 n 次多项式，且设 $q(z)=z^n$. 对 $r>0$，设 $C_r=\{x\in R^2|\ \|x\|=r\}$. 证明对足够大的 r，$p|C_r$ 和 $q|C_r$ 是从 C_r 到 R^2-0 的同伦的映射.

5. **代数基本定理** 证明每一复系数多项式有根. [提示. 对任意 $r>0$，映射 $q|C_r: C_r\to R^2-0$ 不是零伦的，因为它诱导基本群的非平凡的同态.]

---

*) 见 H. Hopf: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, *Compositio Mathematica*, Vol 2, 50~62 1935 关于推广形式见 H. Whitney: On regular closed curves in the plane, *Compositio Mathematica*, Vol. 4, 276~284, 1937. S. Smale. Regular curves on Riemannian manifolds *Trans. Amer Math. Soc.*, Vol. 87. 492~512, 1958 ——原注

**) 见 H. B. Griffiths: The Fundamental group of two spaces with a common point, *Quart. J. of Math.*, Vol. 5, 175~190, 1954 ——原注

第2章 覆叠空间和纤维化

覆叠空间的理论不仅对拓扑学，而且对微分几何、复分析和李群都是重要的. 这理论所以在这里提出，是因为基本群函子提供了覆叠空间问题用代数问题语言的一个准确的表示. 这一点证实了我们对基本群函子的特殊兴趣是有根据的.

本章包括覆叠空间的理论，也引入了纤维丛和纤维化的有关概念. 这些概念在以后另外的内容中还会考虑到. 这里我们采取的是这样的观点，亦即：有唯一道路升腾性质的纤维化是覆叠空间的推广. 因此，我们将较详细地考虑这类纤维化.

在§2.1中定义覆叠空间，在§2.2中定义纤维化，并证明了每个覆叠空间是个纤维化. §2.3处理有唯一道路升腾的纤维化的总空间和底空间的基本群之间的关系，§2.4包括用基本群函子的语言解决这类纤维化的升腾问题.

§2.5中将升腾定理用于连通局部道路连通空间的覆叠空间依其基本群的子群来进行的分类. 这需要从底空间及其基本群的一子群出发构造覆叠空间. 在§2.6中我们考虑了一个逆问题. 从一覆叠空间及其上的适当的变换群出发构造了底空间.

在§2.7中作为覆叠空间的自然推广引入了纤维丛. 这节的主要结果是：局部纤维化是纤维化. 这蕴涵具有拟紧致底空间的纤维丛是纤维化. §2.8中考虑一般纤维化的性质及纤维同伦等价概念. 这些在以后的同伦论研究中是重要的.

§1 覆叠投射

覆叠投射是个连续映射，它是均匀局部同胚. 这一点和有关

概念在本节中连同一些例子和初步性质被引入。

设 $p: \tilde{X}\to X$ 是连续映射。一个开子集 $U\subset X$ 称为被 p 平均覆叠的，若 $p^{-1}(U)$ 是 $\tilde{X}$ 的开子集的分离并，每个这样的开子集皆由 p 同胚地映于 U 上。若 U 是被 p 平均覆叠的，显然 U 的任一开子集也被 p 平均覆叠。连续映射 $p: \tilde{X}\to X$ 被称为覆叠投射，若对每点 $x\in X$ 有一开邻域被 p 平均覆叠。$\tilde{X}$ 称为覆叠空间，X 称为覆叠投射的底空间。

下列为覆叠投射的例子：

1 任一同胚是覆叠投射。

2 若 $\tilde{X}$ 是 X 与一离散空间的积，则投射 $\tilde{X}\to X$ 是覆叠投射。

3 映射 $ex: \boldsymbol{R}\to S^1$ 由 $ex(t)=e^{2\pi it}$ 定义(§1.8中曾经考虑过)是覆叠投射。

4 对任意正整数 n，由 $p(z)=z^n$ 所定义的映射 $p: S^1\to S^1$ 是覆叠投射。

5 对任意正整数 $n\geq 1$，由叠合对径点定义的映射 $p: S^n\to P^n$ 是覆叠投射。

6 若 G 是拓扑群，H 是 G 的离散子群，且 G/H 是其左(或右)陪集空间，则投射 $G\to G/H$ 是覆叠投射。

连续映射 $f: Y\to X$ 称为局部同胚，若每点 $y\in Y$ 有一开邻域被 f 同胚地映至 X 的开子集上，若如是，则 Y 的每点有任意小的邻域有此性质，且有下列引理：

7 引理 *局部同胚是开映射。* ∎

8 引理 *覆叠投射是局部同胚。*

证明 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是覆叠投射，且设 $\tilde{x}\in\tilde{X}$。设 U 是 $p(\tilde{x})$ 的开邻域，被 p 平均覆叠，则 $p^{-1}(U)$ 是开集的分离并，每个开集皆被 p 同胚地映到 U 上。设 $\tilde{U}$ 是这些开集之中包含 $\tilde{x}$ 的那一个，则 $\tilde{U}$ 是 $\tilde{x}$ 的开邻域，使 $p|\tilde{U}$ 是把 $\tilde{U}$ 同胚于 X 的开子集 U 的。∎

局部同胚不见得是覆叠投射，如下述例子所表明的。

9 例 设 $p: (0, 3)\to S^1$ 是例3的映射 $ex: \boldsymbol{R}\to S^1$ 限制于开

线段$(0, 3)$上. 因为p是局部同胚限制在开子集上, 所以它也是局部同胚. 它也是满映, 但它不是覆叠投射, 因为复数$1\in S^1$没有被p平均覆叠的邻域.

下述是引理7和8以及(从定义推出的)覆叠投射必是满映这一结果的推论.

10 推论 *覆叠投射使其底空间成为其覆叠空间的商空间.* ▌

对于局部连通空间, 存在覆叠投射在其底空间的分支上的下述简化.

11 定理 *若X是局部连通的, 则连续映射$p: \tilde{X}\to X$是覆叠投射, 当且仅当对X的每分支C映射*

$$p|p^{-1}C: p^{-1}C\to C$$

是覆叠投射.

证明 若p是覆叠投射, 且C是X的一分支, 设$x\in C$及U是x的开邻域被p平均覆叠. 设V是U的包含x的分支. 因为X是局部连通的, 所以V在X中是开的, 且从而在C中也是开的. 显然, V被$p|p^{-1}C$平均覆叠. 所以$p|p^{-1}C$是覆叠投射.

反之, 假设映射$p|p^{-1}C: p^{-1}C\to C$是覆叠投射, 对X的每分支C成立. 设$x\in C$及U是x在C中的开邻域, 被$p|p^{-1}C$平均覆叠. 因为X局部连通, C在X中从而是开的, 所以U在X中也是开的, 且显然被p平均覆叠. 因而p是覆叠投射. ▌

一般地, 被平均覆叠的开集的原像表成开集的分离并, 每个开集被同胚地映上的, 其表示法并不唯一(可考虑一个被平均覆叠的离散集合的情形); 然而, 对连通的被平均覆叠的开集, 这些开子集有下述的特征:

12 引理 *设U是X的开连通子集, 被连续映射$p: \tilde{X}\to X$所平均覆叠, 则p同胚地映$p^{-1}(U)$的每分支于U上.*

证明 由条件, $p^{-1}(U)$是开子集的分离并, 其中每个开子集被p同胚于U. 因为U是连通的, 这些开子集也都是连通的. 又因为它们是开的且是彼此分离的, 所以每个开子集是$p^{-1}(U)$的分支. ▌

13 推论 考虑交换的三角形

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}_1 & \xrightarrow{p} & \tilde{X}_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & X & \end{array}$$

其中 X 是局部连通的，且 p_1 和 p_2 是覆叠投射．若 p 是满映，则它也是覆叠投射．

证明 若 U 是 x 的连通开子集，被 p_1 和 p_2 平均覆叠，则易从引理 12 导出 $p_2^{-1}(U)$ 的每个分支被 p 平均覆叠．∎

14 定理 若 $p: \tilde{X}\to X$ 是覆叠投射，X 是局部连通的，则对 $\tilde{X}$ 的任意分支 $\tilde{C}$，映射

$$p|\tilde{C}: \tilde{C}\to p(\tilde{C})$$

是到 X 的某分支上的覆叠投射．

证明 设 $\tilde{C}$ 是 $\tilde{X}$ 的一个分支．下面证明 $p(\tilde{C})$ 是 X 的分支．$p(\tilde{C})$ 当然是连通的．为了说明它是 X 的既开又闭的子集，设 x 是 $p(\tilde{C})$ 的一个闭包点，且设 U 是 x 的连通开邻域被 p 平均覆叠．因为 U 与 $p(\tilde{C})$ 相交[*]，所以 $p^{-1}(U)$ 与 $\tilde{C}$ 相交．所以 $p^{-1}(U)$ 的某分支 $\tilde{U}$ 与 $\tilde{C}$ 相交．因 $\tilde{C}$ 是 $\tilde{X}$ 的分支，所以 $\tilde{U}\subset\tilde{C}$．则由引理12，$p(\tilde{C})\supset p(\tilde{U})=U$．故 $p(\tilde{C})$ 的闭包包含于 $p(\tilde{C})$ 之内，这蕴涵 $p(\tilde{C})$ 是既开又闭的．同样的论证表明，若 $x\in p(\tilde{C})$，且 U 是 x 在 X 中的开连通邻域被 p 平均覆叠，则 $U\subset p(\tilde{C})$ 且 $(p|\tilde{C})^{-1}(U)$ 是 $p^{-1}(U)$ 的那些同 $\tilde{C}$ 相交的分支的分离并．从引理 12 得出，U 被 $p|\tilde{C}$ 平均覆叠．所以 $p|\tilde{C}: \tilde{C}\to p(\tilde{C})$ 是覆叠投射．∎

下述例子说明定理 14 的逆不真．

15 例 设 $X=S^1\times S^1\times\cdots$ 是 1 维球的可数积，且对 $n\geq 1$ 设 $\tilde{X}_n=\boldsymbol{R}^n\times S^1\times S^1\times\cdots$．定义 $p_n: \tilde{X}_n\to X$，由

$$\begin{aligned}&p_n(t_1, \cdots, t_n, z_1, z_2, \cdots)\\&\quad=(ex(t_1), \cdots, ex(t_n), z_1, z_2, \cdots).\end{aligned}$$

设 $\tilde{X}=\vee\tilde{X}_n$，定义 $p: \tilde{X}\to X$ 使 $p|\tilde{X}_n=p_n$．$\tilde{X}$ 的分支是空间 $\tilde{X}_n$ 且映射 $p|\tilde{X}_n=p_n: \tilde{X}_n\to X$ 是覆叠投射．然而，p 不是覆叠投射，因

[*] 相交，意味着有非空的交集．——译注

与没有 X 的开子集被 p 平均覆叠.

为了以后的目的,我们将对定理 11 和 14 进行类推. 其中"分支"由"道路分支"所取代. 为此,我们需要下述定义:一个拓扑空间称为局部道路连通的,若开子集的道路分支是开的. 下列诸条是此定义的简单的推论.

16 *局部道路连通空间的任意开子集自身是局部道路连通的.* ∎

17 *局部道路连通空间是局部连通的.* ∎

18 *在局部道路连通空间中的分支与道路分支重合.* ∎

19 *连通局部道路连通空间是道路连通的.* ∎

从命题 17 和 18,我们可得到定理 11 和 14 的下述推广.

20 **定理** *若 X 是局部道路连通的,则连续映射 $p: \tilde{X}\to X$ 是覆叠投射,当且仅当对 X 的每个道路分支 A,*

$$p|p^{-1}A: p^{-1}A\to A$$

是覆叠投射. 在此情况下,若 $\tilde{A}$ 是 $\tilde{X}$ 的任意道路分支,则 $p|\tilde{A}$ 是 $\tilde{A}$ 到 X 的某个道路分支的覆叠投射. ∎

§2 同伦升腾性质

同伦升腾性质对偶于同伦扩充性质. 这导致纤维化的概念,它对偶于§1.4 引入的上纤维化的概念. 本节中我们定义纤维化的概念,并证明覆叠投射是一类特殊的纤维化. 此特殊种类的纤维化被视为覆叠投射的推广,我们对覆叠投射的以下的研究将基于这种一般概念的探讨. 在本章结尾涉及对纤维化的一般考虑.

我们将着手于代数拓扑学中的一个称为升腾问题的重要问题,它是扩充问题的对偶. 设 $p: E\to B$ 及 $f: X\to B$ 是映射. 所谓 f 的升腾问题是决定是否有连续映射 $f': X\to E$ 使 $f=p\circ f'$,亦即在图表

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \nearrow & & \searrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

中虚箭头是否对应于一个连续映射使图表交换．若有此映射 f'，则 f 称为升腾到 E，且称 f' 为 f 的一个升腾．为使升腾问题成为一个同伦范畴的问题，我们需要一个与同伦扩充性质相类似的称作同伦升腾的性质，定义如下：映射 $p: E\to B$ 称为关于空间 X 有同伦升腾性质，若给定映射 $f': X\to E$ 和 $F: X\times I\to B$，使 $F(x, 0)=pf'(x)$（对 $x\in X$），便有映射 $F': X\times I\to E$，使 $F'(x, 0)=f'(x)$（对 $x\in X$）和 $p\circ F'=F$．若 f' 被视为 $X\times 0$ 到 E 的映射，则 F' 的存在性等价于使下述图表可交换的用虚箭头所表示的映射的存在性：

$$\begin{array}{ccc} X\times 0 & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow\cap & \nearrow & \downarrow p \\ X\times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

若 $p: E\to B$ 关于 X 有同伦升腾性质，而且 $f_0, f_1: X\to B$ 是同伦的，易见 f_0 可升腾到 E，当且仅当 f_1 可升腾到 E．从而，映射 $X\to B$ 是否可升腾到 E，是映射的同伦类的性质．这样，同伦升腾性质蕴涵对映射 $X\to B$ 的升腾问题是一同伦范畴中的问题．

映射 $p: E\to B$ 称为纤维化（或在文献上称为 Hurewicz 纤维空间），若 p 关于任意空间有同伦升腾性质．E 称为此纤维化的总空间，B 称为此纤维化的底空间．对 $b\in B$，$p^{-1}(b)$ 称为 b 上的纤维．

若 $p: E\to B$ 是纤维化，B 中任一道路 ω 使得 $\omega(0)\in p(E)$ 的，可在 E 中被升腾为一道路．事实上，ω 可被视为一个同伦 $\omega: P\times I\to B$，其中 P 是单点空间，点 $e_0\in E$ 使 $p(e_0)=\omega(0)$，对应映射 $f: P\to E$ 使 $pf(P)=\omega(P, 0)$．从 p 的同伦升腾性质得出存在 E 的道路 $\tilde{\omega}$，使 $\tilde{\omega}(0)=e_0$ 且 $p\circ\tilde{\omega}=\omega$．$\tilde{\omega}$ 即为 ω 的升腾．

1．例 设 F 是任一空间，且设 $p: B\times F\to B$ 是到第一个因子的投射．则 p 是纤维化，且对任一 $b\in B$，b 上的纤维同胚于 F．

为了证明覆叠投射是纤维化，我们首先阐述覆叠投射对连通空间的下述唯一升腾性质．

2. 定理 设 $p:\tilde{X}\to X$ 是覆叠投射，且设 $f, g: Y\to\tilde{X}$ 是同一映射的升腾(即，$p\circ f=p\circ g$)。若 Y 是连通的且 f 在 Y 的某点与 g 重合，则 $f=g$.

证明 设 $Y_1=\{y\in Y\,|\,f(y)=g(y)\}$. 我们来证明 Y_1 在 Y 中是开的. 若 $y\in Y_1$, 设 U 是 $pf(y)$的开邻域被 p 平均覆叠，且设 $\tilde{U}$ 是一个包含 $f(y)$ 的 $\tilde{X}$ 的开子集，使 p 将 $\tilde{U}$ 同胚地映到 U 上，则 $f^{-1}(\tilde{U})\cap g^{-1}(\tilde{U})$是一个包含 y 的 Y 的开子集，且包含于 Y_1 中.

设 $Y_2=\{y\in Y\,|\,f(y)\neq g(y)\}$. 下面证明 Y_2 在 Y 中也是开的(若设 $\tilde{X}$ 是 Hausdorff 空间，这可以从 Hausdorff 空间的一般性质得到). 设 $y\in Y_2$, 且 U 是 $pf(y)$的开子集被 p 平均覆叠，因为 $f(y)\neq g(y)$，故有 $\tilde{X}$ 的分离的开子集 $\tilde{U}_1$ 和 $\tilde{U}_2$ 使得 $f(y)\in\tilde{U}_1$，且 $g(y)\in\tilde{U}_2$，并且 p 映两集合 $\tilde{U}_1$ 和 $\tilde{U}_2$ 各自同胚于 U. 则 $f^{-1}(\tilde{U}_1)\cap g^{-1}(\tilde{U}_2)$是一个包含 y 的 Y 的开子集，且包含于 Y_2 中.

因为 $Y=Y_1\cup Y_2$ 且 Y_1 和 Y_2 是分离的开集，从 Y 的连通性知 $Y_1=\emptyset$ 或 $Y_1=Y$ 必有且只有一个成立. 根据假设 $Y_1\neq\emptyset$, 故 $Y_1=Y$, 从而 $f=g$. ▌

我们现在已作好证明覆叠投射具有同伦升腾性质的准备.

3. 定理 覆叠投射是纤维化

证明 设 $p:\tilde{X}\to X$ 是覆叠投射，且设 $f': Y\to\tilde{X}$ 及 $F: Y\times I\to X$ 是映射，使 $F(y, 0)=pf'(y)$ (对 $y\in Y$). 下面证明对每个 $y\in Y$, y 必有一个在 Y 中的开邻域 N_y 和映射 $F'_y: N_y\times I\to\tilde{X}$ 使 $F'_y(y', 0)=f'(y')$ (对 $y'\in N_y$ 及 $pF'_y=F|N_y\times I$). 假设有这样的邻域 N_y 及映射 F'_y. 若 $y''\in N_y\cap N_{y'}$, 则 $F'_y|y''\times I$ 和 $F'_{y'}|y''\times I$ 是连通空间 $y''\times I$ 到 $\tilde{X}$ 的映射，使对 $t\in I$,

$$
\begin{aligned}
p\circ(F'_y|y''\times I)(y'', t) &= F(y'', t)\\
&= p\circ(F'_{y'}|y''\times I)(y'', t).
\end{aligned}
$$

因为$(F'_y|y''\times I)(y'', 0)=f'(y'')=(F'_{y'}|y''\times I)(y'', 0)$，则从定理2，得到 $F'_y|y''\times I=F'_{y'}|y''\times I$. 因为这对所有的 $y''\in N_y\cap N_{y'}$ 都成立，故

$$F'_y|(N_y\cap N_{y'})\times I=F'_{y'}|(N_y\cap N_{y'})\times I.$$

亦即：存在连续映射 $F': Y\times I\to\widetilde{X}$ 使 $F'|N_y\times I=F'_y$，且 F' 是 F 的升腾，使得 $F'(y, 0)=f'(y)$（对于 $y\in Y$）。这样，我们把定理化简为构造开邻域 N_y 及映射 F'_y.

从 $p: \widetilde{X}\to X$ 是覆叠投射这一事实（及 I 的紧致性）得出，对每 $y\in Y$，有 y 的开邻域 N_y 和 I 的点列 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1$，使对 $i=1, \cdots, m$，$F(N_y\times[t_{i-1}, t_i])$ 被包含于 X 的某个被 p 平均覆叠的开子集中。下面证明有映射 $F'_y: N_y\times I\to\widetilde{X}$ 具有所需的性质。这只要定义映射

$$G_i: N_y\times[t_{i-1}, t_i]\to\widetilde{X}\quad(i=1, \cdots, m)$$

使得

$$p\circ G_i=F|N_y\times[t_{i-1}, t_i]$$
$$G_1(y', 0)=f'(y')\ (y'\in N_y)$$
$$G_{i-1}(y', t_{i-1})=G_i(y', t_{i-1})\ (y'\in N_y)$$
$$(i=2, \cdots, m)$$

就够了，因为，给出这样的映射 G_i，存在映射 $F'_y: N_y\times I\to\widetilde{X}$，使

$$F'_y|N_y\times[t_{i-1}, t_i]=G_i$$

（对 $i=1, \cdots, m$）。则 F'_y 即有所需的性质.

映射 G_i 可对 i 归纳地来定义。为定义 G_1，设 U 是 X 的开集，被 p 平均覆叠，且 $F(N_y\times[t_0, t_1])\subset U$。设 $\{\widetilde{U}_j\}$ 是 $\widetilde{X}$ 的开子集的分离族，使 $p^{-1}(U)=\bigcup\widetilde{U}_j$ 且 p 映 $\widetilde{U}_j$ 同胚于 U（对于每个 j）。设 $V_j=f'^{-1}(\widetilde{U}_j)$ 则 $\{V_j\}$ 是分离开集族覆盖 N_y，且 G_1 由对每个 j 使 G_1 映 $V_j\times[t_0, t_1]$ 到 $\widetilde{U}_j$ 为 $F|V_j\times[t_0, t_1]$ 的升腾所唯一地确定。这样就定义了 G_1.

设 G_{i-1} 对 $1<i\leqslant m$ 已定义。设 U' 是 X 的开子集被 p 平均覆叠，使 $F(N_y\times[t_{i-1}, t_i])\subset U'$。设 $\{\widetilde{U}'_k\}$ 是 $\widetilde{X}$ 的分离开子集族，使 $p^{-1}(U')=\bigcup\widetilde{U}'_k$，且 p 映 $\widetilde{U}'_k$ 同胚于 U'（对每 k）。设

$$V'_k=\{y'\in N_y|G_{i-1}(y', t_{i-1})\in\widetilde{U}'_k\}.$$

则 $\{V'_k\}$ 是分离开集族覆盖 N_y，且 G_i 被唯一确定为映射，使对每个 k，G_i 映 $V'_k\times[t_{i-1}, t_i]$ 到 $\widetilde{U}'_k$ 是 $F|V'_k\times[t_{i-1}, t_i]$ 的升腾。这样

就定义了 G_t. ∎

映射 $p: E\to B$ 称为有唯一道路升腾，若给定 E 中的道路 ω 和 ω' 使 $p\circ\omega=p\circ\omega'$ 且 $\omega(0)=\omega'(0)$，则 $\omega=\omega'$. 从定理 2 推出，覆叠投射有唯一道路升腾.

4 引理 若一映射有唯一道路升腾，则它对道路连通空间有唯一升腾性质.

证明 设 $p: E\to B$ 有唯一道路升腾，设 Y 是道路连通的，且设 $f, g: Y\to E$ 是映射，使 $p\circ f=p\circ g$，并有 $f(y_0)=g(y_0)$（对某个 $y_0\in Y$）. 下面证明 $f=g$. 设 $y\in Y$ 及 ω 是在 Y 中从 y_0 到 y 的道路. 则 $f\circ\omega$ 和 $g\circ\omega$ 是 E 中的道路，为 B 中的同一道路的升腾，且有共同的始. 因 p 有唯一道路升腾，故 $f\circ\omega=g\circ\omega$. 所以

$$f(y)=(f\circ\omega)(1)=(g\circ\omega)(1)=g(y).\ ∎$$

下述定理刻划有唯一道路升腾的纤维化的特征性质.

5 定理 一纤维化有唯一道路升腾，当且仅当其每个纤维没有非常值道路.

证明 设 $p: E\to B$ 为有唯一道路升腾的纤维化. 设 ω 是纤维 $p^{-1}(b)$ 中的道路，且设 ω' 是 $p^{-1}(b)$ 中的常值道路，使 $\omega'(0)=\omega(0)$. 则 $p\circ\omega=p\circ\omega'$，这蕴涵 $\omega=\omega'$. 从而 ω 是常值道路.

反之，设 $p: E\to B$ 为纤维化，使每个纤维没有非平凡的道路. 且设 ω 和 ω' 是 E 中的道路，使 $p\circ\omega=p\circ\omega'$ 及 $\omega(0)=\omega'(0)$. 对 $t\in I$，设 ω_t'' 是 E 中的道路，由

$$\omega_t''(t')=\begin{cases}\omega((1-2t')t) & \left(0\leqslant t'\leqslant \frac{1}{2}\right)\\ \omega'((2t'-1)t) & \left(\frac{1}{2}\leqslant t'\leqslant 1\right)\end{cases}$$

所定义. 则 ω_t'' 是 E 中从 $\omega(t)$ 到 $\omega'(t)$ 的道路，且 $p\circ\omega_t''$ 是 B 中的闭道路，它相对于 $\dot{I}$ 同伦于在 $p\omega(t)$ 的常值道路. 由 p 的同伦升腾性质，存在映射 $F': I\times I\to E$ 使得 $F'(t', 0)=\omega_t''(t')$，且 F' 映 $0\times I\cup I\times 1\cup 1\times I$ 于纤维 $p^{-1}(p\omega(t))$. 因为 $p^{-1}(p\omega(t))$ 没有非常值道路，故 F' 映 $0\times I$, $I\times 1$ 和 $1\times I$ 于一个点，这推出 $F'(0, 0)$

$=F'(1, 0)$. 所以 $\omega'_1(0)=\omega'_1(1)$, 且 $\omega(t)=\omega'(t)$. ▮

我们看到了，覆叠投射是有唯一道路升腾的纤维化. 在§2.4中将说明，若底空间满足某些合理的假设，任一有唯一道路升腾的纤维化是覆叠投射. 把有唯一道路升腾的纤维化当作覆叠投射的推广来研究的一个理由是：下列两个定理都是容易证明的，但对覆叠投射则两者皆不成立.

6 定理 （有唯一道路升腾的）纤维化的合成是（有唯一道路升腾的）纤维化. ▮

7 定理 （有唯一道路升腾的）纤维化的积是（有唯一道路升腾的）纤维化. ▮

有一个例子说明定理6对覆叠投射不成立.

8 例 设 X 和 X_n, 对 $n\geqslant 1$, 都是1维球的可数积，设 $\tilde{X}_n=\boldsymbol{R}^n\times X$, 且定义 $p_n: \tilde{X}_n\to X_n$ 由

$$p_n(t_1, \cdots, t_n, z_1, z_2, \cdots)$$
$$=(ex(t_1), \cdots, ex(t_n), z_1, z_2, \cdots)$$

所给出. 则 p_n 是覆叠投射，对 $n\geqslant 1$. 从定理2.1.11推出，$\vee p_n$: $\vee\tilde{X}_n\to\vee X_n$ 是覆叠投射. 因 $\vee X_n$ 是 X 与正整数集合的积，故有覆叠投射 $\vee X_n\to X$（见例2.1.2）. 其合成

$$\vee\tilde{X}_n\to\vee X_n\to X$$

不是覆叠投射（见例2.1.15）.

类似地，定理7对覆叠投射也不成立.

9 例 对 $n\geqslant 1$, 设 $p_n: \tilde{X}_n\to X_n$ 是覆叠投射 $ex: \boldsymbol{R}\to S^1$. 则

$$\times p_n: \times\tilde{X}_n\to\times X_n$$

不是覆叠投射.

从定理6得出，存在一范畴，其对象为拓扑空间，其态为有唯一道路升腾的纤维化. 从定理7得出，此范畴有积. 不难核实，也有和. 现在来描述一个范畴，它依赖于一给定底空间，它在研究覆叠投射及纤维化时更有用. 对一给定的空间 X, 存在一范畴，其对象为映射 $p: \tilde{X}\to X$, 它是有唯一道路升腾的纤维化，其态是交换三角形：

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & {}_{p_1}\searrow \quad \swarrow_{p_2} & \\ & X & \end{array}$$

若 $p_j\colon \tilde{X}_j \to X$ 是这范畴中的一族带指标的对象，令 $p\colon \vee \tilde{X}_j \to X$ 是映射，使 $p|\tilde{X}_j = p_j$，则 p 也是此范畴中的对象，且是族 $\{p_j\}$ 在此范畴中的和。

为了说明这个范畴也有积，给出一族映射 $p_j\colon \tilde{X}_j \to X$，令

$$\tilde{X} = \{(x_j) \in \times \tilde{X}_j | p_j(x_j) = p_{j'}(x_{j'}) \text{对所有} j, j'\},$$

且定义 $p\colon \tilde{X} \to X$，由 $p((x_j)) = p_j(x_j)$ 给出。若每一 p_j 是纤维化，则 p 也是；且若每个 p_j 有唯一道路升腾，则 p 也有。因而 p 是 $\{p_j\}$ 在有唯一道路升腾的纤维化的范畴中的积。此映射 p 称为映射族 $\{p_j\}$ 的纤维积。在§2.8 中我们将对它较详细地考虑。

存在一个类似的范畴，其对象为以 X 为底空间的覆叠投射，其态为交换三角形。此范畴有有限和及有限积，但既无任意和又无任意积。事实上，对每 n，设

$$p_n\colon \ \boldsymbol{R}^n \times S^1 \times S^1 \times \cdots \to S^1 \times S^1 \times \cdots$$

由

$$p_n(t_1, \cdots, t_n, z_1, z_2, \cdots) = (e^{2\pi i t_1}, \cdots, e^{2\pi i t_n}, z_1, z_2, \cdots)$$

所定义，如例 8 所述。则族$\{p_n\}$在以 X 为底空间的覆叠投射的范畴中既无和又无积。

§3　与基本群的关系

在有唯一道路升腾的纤维化中，总空间的基本群同构于底空间的基本群的一个子群。基本群的相应的子群导致对有唯一道路升腾的纤维化的分类。事实上，我们可在下节中看到，基本群函子对于有唯一道路升腾的纤维化解决了升腾问题。本节考虑有唯一道路升腾的纤维化的总空间和底空间的基本群之间的关系。

类似于定理2.1.14，我们从纤维化的局部性质开始研

究.

1 引理 设 $p: E\to B$ 是纤维化. 若 A 是 E 的任一道路分支, 则 pA 是 B 的道路分支, 且 $p|A: A\to pA$ 是纤维化.

证明 因 pA 是道路连通空间的连续像, 所以是道路连通的. 它是 B 的极大的道路连通的子集. 这是因为, 若 ω 是 B 中的道路, 始于 pA 中, 则存在 ω 的升腾 $\tilde{\omega}$ 始于 A 中. 因 A 是 E 的道路分支, 故 $\tilde{\omega}$ 是 A 中的道路. 所以 $\omega=p\circ\tilde{\omega}$ 是 pA 中的道路. 因而 pA 是 B 的极大道路连通子集. 则由定理1.7.9, 它是 B 的道路分支.

为了证明 $p|A: A\to pA$ 有同伦升腾性质, 设 $f': Y\to A$ 和 $F: Y\times I\to pA$ 是映射, 使 $F(y, 0)=pf'(y)$. 因为 p 是纤维化, 故存在映射 $F': Y\times I\to E$, 使 $p\circ F'=F$, 且 $F'(y, 0)=f'(y)$ (对任意 $y\in Y$). F' 一定映 $y\times I$ 到 E 的包含 $F'(y, 0)$ 的道路分支中. 所以 $F'(y\times I)\subset A$ (对所有 y), 且 $F': Y\times I\to A$ 是 F 的升腾, 使

$$F'(y, 0)=f'(y). ▌$$

对局部道路连通空间, 我们有类似于定理2.1.20的下述结果, 它把纤维化的研究简化为对总空间和底空间道路连通的纤维化的研究.

2. 定理 设 $p: E\to B$ 是映射. 若 E 是局部道路连通的, 则 p 是纤维化, 当且仅当对 E 的每个道路分支 A, pA 是 B 的道路分支, 且 $p|A: A\to pA$ 是纤维化.

证明 若 $p: E\to B$ 是纤维化且 A 是 E 的道路分支, 则从引理1得出, pA 是 B 的道路分支, 且 $p|A: A\to pA$ 是纤维化.

为了证明其逆, 设 $f': Y\to E$ 及 $F: Y\times I\to B$ 是使 $F(y, 0)=pf'(y)$ 的映射. 设 $\{A_j\}$ 是 E 的所有道路分支, 则 $\{A_j\}$ 是 E 的分离的开子集族. 设 $V_j=f'^{-1}(A_j)$. 则 $\{V_j\}$ 是 Y 的分离开覆盖. 所以, 为构造 $F': Y\times I\to E$ 使 $p\circ F'=F$ 且 $F'(y, 0)=f'(y)$, 只需构造映射 $F'_j: V_j\times I\to E$ 对所有 j, 使 $p\circ F'_j=F|V_j\times I$ 及 $F'_j(y, 0)=f'(y)$ 即可.

因为 $F(y\times I)$ 包含于 B 的包含 $F(y, 0)=pf'(y)$ 的道路分支中, 故从 pA_j 是 B 的道路分支得出 $F(V_j\times I)\subset pA_j$ (对所有 j).

因为 $p|A_j: A_j\to pA_j$ 是纤维化，故存在映射 $F'_j: V_j\times I\to A_j$，使 $pF'_j=F|V_j\times I$ 及 $F'_j(y,\ 0)=f'(y)$（对 $y\in V_j$）。所以 p 有同伦升腾性质. ▌

因为在一拓扑空间中每个道路位于其某个道路分支之中，故显然定理 2 在用短语"有唯一道路升腾的纤维化"来代替"纤维化"时仍保持有效.

关于有唯一道路升腾的纤维化的主要结果概括于下述命题之中.

3. 引理 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 若 ω 和 ω' 是 $\tilde{X}$ 中的道路，使 $\omega(0)=\omega'(0)$ 及 $p\circ\omega\simeq p\circ\omega'$，则 $\omega\simeq\omega'$.

证明 设 $F: I\times I\to X$ 是从 $p\circ\omega$ 到 $p\circ\omega'$ 的相对于 $\dot{I}$ 的同伦［亦即：$F(t,\ 0)=p\omega(t)$，$F(t,\ 1)=p\omega'(t)$，$F(0,\ t)=p\omega(0)$ 及 $F(1,\ t)=p\omega(1)$］. 由纤维化的同伦升腾性质，存在映射 $F': I\times I\to\tilde{X}$，使 $F'(t,\ 0)=\omega(t)$ 和 $pF'=F$. 则 $F'(0\times I)$ 和 $F'(1\times I)$ 分别包含于 $p^{-1}(p\omega(0))$ 中及 $p^{-1}(p\omega(1))$ 中. 由定理 2.2.5，$F'(0\times I)$ 和 $F'(1\times I)$ 都是单点. 因而 F' 是相对于 $\dot{I}$ 的从 ω 到某道路 ω'' 的同伦，使 $\omega''(0)=\omega(0)$ 及 $p\circ\omega''=p\circ\omega'$. 因 $\omega'(0)=\omega(0)$，故从 p 的唯一道路升腾性质得到 $\omega'=\omega''$，并且 F': $\omega\simeq\omega'$ rel $\dot{I}$. ▌

从引理 3 推出，若 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，则在 $\tilde{X}$ 的基本广群中，对任意两个对象 $\tilde{x}_0$ 和 $\tilde{x}_1$，p_* 将 $\hom(\tilde{x}_0,\ \tilde{x}_1)$ 单映于 $\hom(p(\tilde{x}_0),\ p(\tilde{x}_1))$ 中. 特别地，若 $\tilde{x}_0=\tilde{x}_1$，我们得到下述定理.

4 定理 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 则对任意的 $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$，同态

$$p_*: \pi(\tilde{X},\ \tilde{x}_0)\to\pi(X,\ x_0)$$

是单同态. ▌

这个结果提供了把有唯一道路升腾纤维化的问题化简为关于基本群问题的基础. 为使基本群确实可代表问题中的空间，我们假定牵涉到的空间都是连通的. 从定理 2 得出，这对局部道路连

通空间不失一般性.

5 引理 设 $p: \widetilde{X} \to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，且假定 $\widetilde{X}$ 是非空道路连通空间. 若 $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}$，则在 X 中存在从 $p(\widetilde{x}_0)$ 到 $p(\widetilde{x}_1)$ 的道路 ω，使

$$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = h_{[\omega]} p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

反之，给定 X 中从 $p(\widetilde{x}_0)$ 到 x_1 的道路 ω，则存在点 $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$，使

$$h_{[\omega]} p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) = p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0).$$

证明 为证明第一部分，设 $\widetilde{\omega}$ 是 $\widetilde{X}$ 中从 $\widetilde{x}_0$ 到 $\widetilde{x}_1$ 的道路. 则

$$\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = h_{[\widetilde{\omega}]}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

所以
$$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = h_{[p\circ\widetilde{\omega}]} p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1).$$

从而 $p\circ\widetilde{\omega}$ 是从 $p(\widetilde{x}_0)$ 到 $p(\widetilde{x}_1)$ 的道路.

反之，在 X 中给出从 $p(\widetilde{x}_0)$ 到 x_1 的道路 ω，设 $\widetilde{\omega}$ 是 $\widetilde{X}$ 中的道路，使 $\widetilde{\omega}(0) = \widetilde{x}_0$ 及 $p\widetilde{\omega} = \omega$，若 $\widetilde{x}_1 = \widetilde{\omega}(1)$，则

$$\begin{aligned} h_{[\omega]} p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) &= p_{\#}(h_{[\widetilde{\omega}]}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1)) \\ &= p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0). \ \blacksquare \end{aligned}$$

由此不难得出下述结果:

6. 定理 设 $p: \widetilde{X} \to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，且设 $\widetilde{X}$ 是非空道路连通空间. 对 $x_0 \in p\widetilde{X}$，集合 $\{p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \mid \widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$ 是 $\pi(X, x_0)$ 中一个共轭类. 若 ω 是 $p\widetilde{X}$ 中从 x_0 到 x_1 的道路，则 $h_{[\omega]}$ 映 $\pi(X, x_1)$ 中的共轭类到 $\pi(X, x_0)$ 中的共轭类. $\blacksquare$

设 $p. \widetilde{X} \to X$ 是纤维化，且设 ω 是 X 中始于 x_0 的道路. 定义映射 $F_\omega: p^{-1}(x_0) \times I \to X$ 使 $F_\omega(\widetilde{x}, t) = \omega(t)$，且设 $i: p^{-1}(x_0) \subset \widetilde{X}$. 则 $pi(\widetilde{x}) = F_\omega(\widetilde{x}, 0)$ (对于 $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$). 由 p 的同伦升腾性质，存在映射 $G_\omega: p^{-1}(x_0) \times I \to \widetilde{X}$ 使 $G_\omega(\widetilde{x}, 0) = i(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$，且 $p\circ G_\omega = F_\omega$.

现设 p 有唯一道路升腾. 下面证明从 $p^{-1}(x_0)$ 到 $p^{-1}(\omega(1))$ 的映射 $\widetilde{x} \to G_\omega(\widetilde{x}, 1)$ 仅依赖于 ω 的道路类. 若 $\omega' \simeq \omega$ 和 $G'_{\omega'}: p^{-1}(x_0) \times I \to \widetilde{X}$ 是映射，使 $G'_{\omega'}(\widetilde{x}, 0) = \widetilde{x}$ 及 $p\circ G'_{\omega'} = F_{\omega'}$，则对任意 $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$，置 $\widetilde{\omega}$ 和 $\widetilde{\omega}'$ 是 $\widetilde{X}$ 中分别由 $\widetilde{\omega}(t) = G_\omega(\widetilde{x}, t)$ 及 $\widetilde{\omega}'(t)$

$=G'_{\omega'}(\tilde{x}, t)$所定义的道路．则 $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}'$ 始于 $\tilde{x}$，且

$$p\circ\tilde{\omega}=\omega\simeq\omega'=p\circ\tilde{\omega}'.$$

从引理3得到 $\tilde{\omega}\simeq\tilde{\omega}'$．于是 $G_{\omega}(\tilde{x}, 1)=G'_{\omega'}(\tilde{x}, 1)$对任意 $\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$．所以存在完全确定了的连续映射

$$f_{[\omega]}: p^{-1}(\omega(0))\to p^{-1}(\omega(1)),$$

由 $f_{[\omega]}(\tilde{x})=G_{\omega}(\tilde{x}, 1)$定义，其中 G_{ω} 如上述．显然，若 $\omega(1)=\omega'(0)$，则 $f_{[\omega*\omega']}=f_{[\omega']}\circ f_{[\omega]}$．

7．定理 设 p：$\tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化．则存在从 X 的基本广群到拓扑空间和映射的范畴的反变函子，变 $x\in X$ 到 X 上的纤维，变$[\omega]$到函数 $f_{[\omega]}$．▌

对每个$[\omega]$，$f_{[\omega]}$ 是同胚，这导致下述推论：

8．推论 若 p：$\tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，且 X 是道路连通的，则任意两个纤维同胚．▌

若 X 是道路连通的且 p：$\tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，p 的片数(或 p 的重数)定义为 $p^{-1}(x)$的基数(由推论8，它独立于 $x\in X$ 的选取)．对道路连通的总空间，重数由共轭类决定如下：

9．定理 设 p：$\tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，且设 $\tilde{X}$ 和 X 是非空道路连通空间．若 $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$，则 p 的重数是 $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$在 $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中的指标．

证明 由定理7，$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ 作为置换群从右边作用在 $p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$上，使 $\tilde{x}\circ[\omega]=f_{[\omega]}(\tilde{x})$对 $\tilde{x}\in p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$．若 $\tilde{x}_1$、$\tilde{x}_2\in p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$，设 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_1$ 到 $\tilde{x}_2$ 的道路．则$[p\circ\tilde{\omega}]\in\pi(X, p(\tilde{x}_0))$且 $\tilde{x}_1\circ[p\tilde{\omega}]=\tilde{x}_2$．所以$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$作用在$p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$上是可迁的．$\tilde{x}_0$ 的迷向群[即 $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中保持 $\tilde{x}_0$ 不变的子群]显然等于 $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$．根据一般的考虑*，存在 $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$在 $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中的右陪集集合和$p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$之间的双映．▌

10 例 对 $n\geq 2$，例2.1.5中的覆叠 p：$S^n\to P^n$ 有重数2．因

* 只要群 G 从右边可迁地作用于集合 S 上，则导出在 G 中的迷向群(对任意 $s\in S$)的右陪集的集合与集合 S 之间的双映。——原注

为 S^n 是单连通的，故 $\pi(P^n)\approx Z_2\ (n\geqslant 2)$.

有唯一道路升腾的纤维化 $p: \tilde{X}\to X$ 称为正则的，若 X 中给出任意闭道路 ω，或则 ω 的每个升腾都是闭的，或则没有一个是闭的.

11. 定理 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化．则 p 是正则的，当且仅当 $p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)=p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$，只要 $p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)$.

证明 假设 p 是正则的，且设 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{X}$ 中在 $\tilde{x}_0$ 的闭道路．则 $\tilde{\omega}$ 是 $p\tilde{\omega}$ 的闭升腾．所以 $p\tilde{\omega}$ 有一个在 $\tilde{x}_1$ 的闭升腾 $\tilde{\omega}_1$．于是

$$p_{\#}[\tilde{\omega}]=[p\tilde{\omega}]=p_{\#}[\tilde{\omega}_1].$$

所以
$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

因为 $\tilde{x}_0$ 与 $\tilde{x}_1$ 的地位可互换，故

$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)=p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

反之，若

$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)=p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

只要 $p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)$，设 ω 是 X 中在 $p(\tilde{x}_0)$ 处的闭道路具有在 $\tilde{x}_0$ 处的闭升腾 $\tilde{\omega}$，于是

$$[\omega]=p_{\#}[\tilde{\omega}]\in p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)=p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

所以在 $\tilde{X}$ 中存在一个在 $\tilde{x}_1$ 处的闭道路 $\tilde{\omega}_1$ 使得 $p\tilde{\omega}_1\sim\omega$．若 $\tilde{\omega}_1'$ 是 ω 的升腾，使 $\tilde{\omega}_1'(0)=\tilde{x}_1$，则由 p 的唯一道路升腾性质，$\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_1'$．所以 $\tilde{\omega}_1'$ 是 ω 在 $\tilde{x}_1$ 的闭升腾，故 p 是正则的．▌

在 $\tilde{X}$ 为一非空道路连通空间的情况下，定理 6 和 11 给出下述结果：

12. 定理 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，且 $\tilde{X}$ 为非空道路连通空间．则 p 是正则的，当且仅当对某 $\tilde{x}_0\in\tilde{X}_0$，$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是 $\pi(X, p(\tilde{x}_0))$ 的正规子群．▌

§4 升腾问题

在本节中阐明基本群函子如何解决了有唯一道路升腾的纤维

化的升腾问题. 作为其结果, 基本群函子提供了覆叠投射的分类, 这将在下节中讨论.

头一个结论是: 任意可缩空间到一纤维化的底空间的映射可升腾.

1. 引理 设 $p: E\to B$ 是纤维化. 则从可缩空间到 B 的任一映射, 若其像包含于 $p(E)$ 中, 便可升腾到 E.

证明 设 Y 是可缩的, 且设 $f: Y\to B$ 是映射, 使 $f(Y)\subset p(E)$. 因为 Y 是可缩的, 故 f 同伦于 Y 到 $f(Y)$ 的某点的常值映射. $f(Y)\subset p(E)$, 因之常值映射可升腾到 E. 则同伦升腾性质蕴涵 f 可升腾到 E. ▌

因为我们使用的是基本群函子, 这对带基点的空间考虑升腾问题时将表明在技术上较为简单.

2. 引理 设 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0)\to(X, x_0)$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 若 y_0 是 Y 的强形变收缩核, 则任意映射 $(Y, y_0)\to(X, x_0)$ 可升腾于映射 $(Y, y_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

证明 设 $f: (Y, y_0)\to(X, x_0)$ 是一映射. f 相对于 y_0 同伦于常值映射 $Y\to x_0$. 这常值映射可升腾于常值映射 $Y\to\tilde{x}_0$. 由同伦升腾性质, f 可升腾于映射 $f': Y\to\tilde{X}$, 使得 f' 同伦于常值映射 $Y\to\tilde{x}_0$, 其同伦为映 $y_0\times I$ 到 $p^{-1}(x_0)$ 的映射. 因为 $p^{-1}(x_0)$ 没有非常值道路(由定理 2.2.5), 故 $f'(y_0)=\tilde{x}_0$. ▌

为了升腾可缩空间的某些商空间, 把引理 2 用于可缩空间. 将某一空间表示为可缩空间的商空间的通常途径是证明它是其道路空间的商空间. 给定 $y_0\in Y$, 道路空间 $P(Y, y_0)$ 是连续映射 $\omega: (I, 0)\to(Y, y_0)$ 组成的空间, 由紧致开拓扑给出拓扑. 则有函数 $\varphi: P(Y, y_0)\to Y$ 由 $\varphi(\omega)=\omega(1)$ 所定义. 若 U 是 Y 的一开集, 则

$$\varphi^{-1}(U)=\langle 1; U\rangle=\{\omega\in P(Y, y_0)\mid\omega(1)\in U\}$$

是 $P(Y, y_0)$ 的开集. 所以 φ 连续.

3. 引理 在 y_0 处的常值道路是道路空间 $P(Y, y_0)$ 的强形变收缩核.

证明 到在 y_0 处的常值道路的强形变收缩 $F: P(Y, y_0)\times I \to P(Y, y_0)$，由下式定义：

$$F(\omega, t)(t')=\omega((1-t)t'),\ (\omega\in P(Y, y_0);\ t, t'\in I.)$$ ∎

我们证明了 φ 是可缩道路空间 $P(Y, y_0)$ 到 Y 的连续映射. 若 Y 是道路连通的，φ 显然是满的. 如果 Y 还是局部道路连通的，则下述定理说明 φ 是商投射.

4. 定理 *连通局部道路连通空间 Y 是其道路空间 $P(Y, y_0)$ 在映射 φ 下的商空间.*

证明 我们知道 φ 是连续的，且因为连通局部道路连通空间是道路连通的，所以 φ 是满的. 为了完成证明，只消证明 φ 是开映射即可. 设 $\omega\in P(Y, y_0)$ 及 $W=\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n}\langle K_i; U_i\rangle$ 是 ω 的邻域，其中 K_i 在 I 中是紧致的，且 U_i 在 Y 中是开的. 我们枚举这些 K_i，使对某个 $0\leqslant k\leqslant n$，有 $1\in K_1\cap\cdots\cap K_k$，且 $1\notin K_{k+1}\cup\cdots\cup K_n$. 因为 $\omega(1)\in U_1\cap\cdots\cap U_k$，故存在 $\omega(1)$ 的包含于 $U_1\cap\cdots\cap U_k$ 内的道路连通邻域 V. 选取 $0<t'<1$，使得

$$[t', 1]\cap(K_{k+1}\cup\cdots\cup K_n)=\emptyset,$$

且 $\omega([t', 1])\subset V$.

为了完成证明，还应证 $\varphi(W)\supset V$. 设 $y'\in V$，且设 ω' 是 V 中从 $\omega(t')$ 到 y' 的道路. 定义 $\bar{\omega}: I\to Y$，由

$$\bar{\omega}(t)=\begin{cases}\omega(t) & (0\leqslant t\leqslant t')\\ \omega'\left(\dfrac{t-t'}{1-t'}\right) & (t'\leqslant t\leqslant 1)^{*)}\end{cases}$$

给出，对 $i>k$，$\bar{\omega}(K_i)=\omega(K_i)\subset U_i$. 对 $i\leqslant k$，

$$\bar{\omega}(K_i)=\bar{\omega}(K_i\cap[0, t'])\cup\bar{\omega}(K_i\cap[t', 1])$$
$$\subset\omega(K_i)\cup\omega'(I)\subset U_i\cup V=U_i,$$

所以 $\bar{\omega}\in W$ 和 $\varphi(\bar{\omega})=y'$. 从而 $\varphi(W)\supset V$. ∎

综合上列结果，得下述结论，称为升腾定理.

5. 定理 *设 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0)\to(X, x_0)$ 是有唯一道路升腾的纤维*

---

*) 严格来说，此处应限制在 $t=1$ 时 $t'<1$. 因此证明 $\bar{\omega}$ 连续无法用粘结引理，需要在 $t=t'$ 的诸点直接证明. 推导是冗长的，但没有实质的困难. ——译注

化. 设 Y 是连通局部道路连通空间. 则映射 $f:(Y, y_0)\to(X, x_0)$ 有升腾 $(Y, y_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 的充分必要条件是: 在 $\pi(X, x_0)$ 中

$$f_*\pi(Y, y_0)\subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

证明 若 $f':(Y, y_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是 f 的升腾, 则 $f=p\circ f'$, 且

$$f_*\pi(Y, y_0)=p_*f'_*\pi(Y, y_0)\subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

这证明条件是必要的.

现在来证明条件也是充分的. 从引理 3 及 2 推出, 若 ω_0 是在 y_0 的常值道路, 则合成

$$(P(Y, y_0), \omega_0)\xrightarrow{\varphi}(Y, y_0)\xrightarrow{f}(X, x_0)$$

可升腾于映射 $\tilde{f}:(P(Y, y_0), \omega_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. 我们来证明, 若

$$f_*\pi(Y, y_0)\subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0),$$

且若 $\omega, \omega'\in P(Y, y_0)$, 使 $\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$, 则 $\tilde{f}(\omega)=\tilde{f}(\omega')$. 设 $\bar{\omega}$ 和 $\bar{\omega}'$ 分别是 $P(Y, y_0)$ 中从 ω_0 到 ω 和 ω' 的道路, 由 $\bar{\omega}(t)(t')=\omega(tt')$ 和 $\bar{\omega}'(t)(t')=\omega'(tt')$ 定义. 则 $\tilde{f}\circ\bar{\omega}$ 和 $\tilde{f}\circ\bar{\omega}'$ 分别是 $\tilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到 $\tilde{f}(\omega)$ 和 $\tilde{f}(\omega')$ 的道路, 使

$$p\circ\tilde{f}\circ\bar{\omega}=f\circ\varphi\circ\bar{\omega}=f\circ\omega, \qquad p\circ\tilde{f}\circ\bar{\omega}'=f\circ\omega'.$$

因为 $\omega*\omega'^{-1}$ 是 Y 中在 y_0 的闭道路且 $f_*\pi(Y, y_0)\subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, 故存在 $\tilde{X}$ 中在 $\tilde{x}_0$ 的闭道路 $\tilde{\omega}$ 使得

$$(f\circ\omega)*(f\circ\omega')^{-1}\simeq p\circ\tilde{\omega}.$$

于是

$$p\circ(\tilde{f}\circ\bar{\omega})=f\circ\omega\simeq(p\circ\tilde{\omega})*(f\circ\omega')$$
$$=p\circ(\tilde{\omega}*(\tilde{f}\circ\bar{\omega}')).$$

由引理 2.3.3, $\tilde{f}\circ\bar{\omega}\simeq\tilde{\omega}*(\tilde{f}\circ\bar{\omega}')$. 特别地, $\tilde{f}\circ\bar{\omega}$ 的终点 $\tilde{f}(\omega)$ 和 $\tilde{f}\circ\bar{\omega}'$ 的终点 $\tilde{f}(\omega')$ 相同.

从此得出, 有个函数 $f':(Y, y_0)\to(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, 使 $f'\circ\varphi=\tilde{f}$, 再应用定理 4, 可知 f' 是连续的. 因为

$$p\circ f'\circ\varphi=p\circ\tilde{f}=f\circ\varphi,$$

且 φ 是满映, 故 $p\circ f'=f$. 所以, f' 是 f 的升腾. ∎

设 $p: E\to B$ 是纤维化. p 的一个截面是映射 $s: B\to E$, 使 $p\circ s=1_B$ (这样, 截面是 p 的右逆). 容易由同伦升腾性质推知, 存

在 p 的截面，当且仅当$[p]$在同伦范畴中有右逆．因为截面是恒同映射 $B\subset B$ 的升腾，故下述推论是定理5的直接结果．

6．推论 设 $p:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$是有唯一道路升腾的纤维化．若 X 是连通局部道路连通的空间，则存在 p 的截面$(X,x_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$，当且仅当 $p_{\#}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(X,x_0)$．∎

7．推论 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化．若 $\widetilde{X}$ 是非空道路连通空间，且 X 是连通局部道路连通的，则 p 是同胚，当且仅当对某个 $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$，$p_{\#}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(X,p(\widetilde{x}_0))$．

证明 若 p 是同胚，则 $p_{\#}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(X;p(\widetilde{x}_0))$．反之，若 $p_{\#}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(X,p(\widetilde{x}_0))$，则由引理2.3.9，$p$ 是双映．由推论6，它有连续的右逆．所以 p 是同胚．∎

若 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠投射，$\widetilde{X}$ 是道路连通的，则 p 是同胚的充分必要条件是 $p_{\#}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(X,p(\widetilde{x}_0))$（对某个 $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$）．这个关于基本群的条件蕴涵 p 是双映，且由引理2.1.8和2.1.7，p 是开映射；从而对于覆叠投射，推论7的成立可不必假定 X 是局部道路连通的．对于有唯一道路升腾的纤维化，若 X 不是局部道路连通的，这并不成立，因为 p 不一定是开映射．以下的例子说明了这点：

8．例 设 X 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间，定义为四个集合之并：

$$A_1=\{(x,y)\mid x=0,\ -2\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$A_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=-2\};$$

$$A_3=\{(x,y)\mid x=1,\ -2\leqslant y\leqslant 0\},$$

$$A_4=\left\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,\ y=\sin\frac{2\pi}{x}\right\}.$$

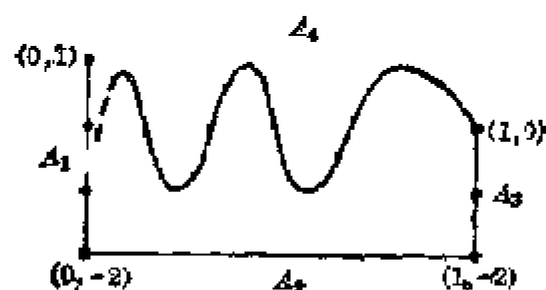


图 8

如图8所示．

设 $\widetilde{X}$ 是半开线段$[0,4)$，定义 $p:\widetilde{X}\to X$，把$[0,1]$线性映到 A_1 上，$[1,2]$线性映到 A_2 上，$[2,3]$线性映到 A_3 上，$[3,4)$同胚到 A_4 上，把 t 映到

$\left(4-t, \sin\frac{2\pi}{t-3}\right)$[*]. 则 $\widetilde{X}$ 和 X 是道路连通的，且 p: $\widetilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 然而 p 不是同胚，尽管 $\widetilde{X}$ 与 X 都是单连通的.

对于道路连通空间，决定底空间的一个开的道路连通子集是否被一纤维化所平均覆叠，升腾定理提供了下述判别法则.

9. 引理 *设 p: $\widetilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 设 $\widetilde{X}$ 和 X 是局部道路连通的，且设 U 是 X 的连通开子集. 则 U 被 p 平均覆叠，当且仅当 U 中的闭道路在 $\widetilde{X}$ 中的任一升腾是闭道路.*

证明 若 U 被 p 平均覆叠，且 $\widetilde{\omega}$ 是 $p^{-1}(U)$ 中的道路，则 $\widetilde{\omega}$ 是 $p^{-1}(U)$ 的某分支 $\widetilde{U}$ 中的道路. 由引理 2.1.12, p 映 $\widetilde{U}$ 同胚于 U. 所以，若 $p\circ\widetilde{\omega}$ 是 U 中的闭道路，$\widetilde{\omega}$ 则是 $\widetilde{U}$ 中的闭道路. 从而条件是必要的.

这条件也是充分的. 因为在 $x_0\in U$ 及 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，由于假设 U 的在 x_0 的闭道路的任一升腾是 $\widetilde{X}$ 中的闭道路，这蕴涵在 $\pi(X, x_0)$ 中有

$$i_{\#}\pi(U, x_0)\subset p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0),$$

其中 i: $(U, x_0)\subset(X, x_0)$. 由定理 5, 存在 i 的升腾 $\widetilde{i}_{\widetilde{x}_0}$: $(U, x_0)\to(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. 由引理 2.2.4, 由道路连通集合组成的族 $\{\widetilde{i}_{\widetilde{x}_0}(U)\mid\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)\}$ 是分离的. 我们来证明其并集等于 $p^{-1}(U)$. 若 $\widetilde{x}\in p^{-1}(U)$，设 ω 是 U 中从 $p(\widetilde{x})$ 到 x_0 的道路，且设 $\widetilde{\omega}$ 是 ω 的升腾，使 $\widetilde{\omega}(0)=\widetilde{x}$. 则 $\widetilde{\omega}(1)\in p^{-1}(x_0)$，且从而 $\widetilde{\omega}$ 是 $\widetilde{i}_{\widetilde{\omega}(1)}(U)$ 中的道路. 从而 $\widetilde{x}\in\widetilde{i}_{\widetilde{\omega}(1)}(U)$，且 $\{\widetilde{i}_{\widetilde{x}_0}(U)\mid\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)\}$ 是把 $p^{-1}(U)$ 划分成道路连通集合. 因为 $p^{-1}(U)$ 是开的，且 $\widetilde{X}$ 是局部道路连通的，故 $\widetilde{i}_{\widetilde{x}_0}(U)$ 对每个 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 在 $\widetilde{X}$ 中都是开的. 显然，p 是从 $\widetilde{i}_{\widetilde{x}_0}(U)$ 到 U 上的同胚(对每 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$). 从而 U 被 p 平均覆叠. ▌

空间 X 称为半局部单连通的，若每点 $x_0\in X$ 有邻域 N，使 $\pi(N, x_0)\to\pi(X, x_0)$ 是退化的.

10. 定理 *每一个有唯一道路升腾的纤维化，其底空间是局*

[*] 原文为 $\left(t-3, \sin\frac{2\pi}{t-3}\right)$，似有误. ——译注

部道路连通且半局部单连通的，其总空间是局部道路连通的，则它是一个覆叠投射.

证明 从引理 9 及半局部单连通的定义得出底空间每点有一开邻域被此纤维化平均覆叠. ▋

§5 覆叠投射的分类

本节包含在一个连通局部道路连通底空间上覆叠投射的分类. 这基于升腾定理，并化为覆叠投射与其底空间基本群的相应子群的共轭的等价性问题. 本节大部分用于构造相应于底空间的基本群中给定的子群的覆叠投射.

设 X 是连通空间. X 的连通覆叠空间范畴以覆叠投射 $p: \tilde{X}\to X$ 为对象，其中 $\tilde{X}$ 是连通的；其态为交换三角形

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & X & \end{array}$$

若 X 是局部道路连通的，且 $p: \tilde{X}\to X$ 是这范畴的一个对象，则由引理 2.1.8, p 是局部同胚，且 $\tilde{X}$ 也是局部道路连通的. 下面证明，在此情况下，这范畴中每个态是覆叠投射[*].

1. 引理 *在一连通局部道路连通空间的连通覆叠空间范畴中，每一态自身是覆叠投射.*

证明 考虑交换三角形

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & {\scriptstyle p_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_2} & \\ & X & \end{array}$$

其中 p_1 和 p_2 是覆叠投射，X 是局部道路连通的. 从推论 2.1.13 得出，若 f 是满映，则 f 是覆叠投射.

因为 $\tilde{X}_2$ 是连通且局部道路连通的，所以它是道路连通的. 设 $\tilde{x}_1\in\tilde{X}_1$ 及 $\tilde{x}_2\in\tilde{X}_2$ 是任意的，且设 $\tilde{\omega}_2$ 是 $\tilde{X}_2$ 中从 $f(\tilde{x}_1)$ 到 $\tilde{x}_2$ 的道

[*] 严格来说，是指作为态的上述交换三角形中的 $f: \tilde{x}_1\to\tilde{x}_2$，而非态本身. ——译注

路. 因为 p_1 是纤维化, 故 $\widetilde{X}_1$ 中存在始于 $\tilde{x}_1$ 的道路 $\tilde{\omega}_1$ 使

$$p_1\circ\tilde{\omega}_1=p_2\circ\tilde{\omega}_2.$$

因 p_2 有唯一道路升腾, $f\circ\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2$. 所以

$$f(\tilde{\omega}_1(1))=\tilde{\omega}_2(1)=\tilde{x}_2.$$

这证明了 f 是满映. ▌

下一个结果解决了这样的问题. 在什么情况下, 在 X 的连通覆叠空间范畴中从一个对象到另一个对象存在态.

2. 定理 设 $p_1: \widetilde{X}_1\to X$ 及 $p_2: \widetilde{X}_2\to X$ 是一连通局部道路连通空间 X 的连通覆叠空间范畴中的两个对象. 则下列各条是等价的:

(a) 存在覆叠投射 $f: \widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$, 使 $p_2\circ f=p_1$.

(b) 对所有使 $p(\tilde{x}_1)=p(\tilde{x}_2)$ 的 $\tilde{x}_1\in\widetilde{X}_1$ 和 $\tilde{x}_2\in\widetilde{X}_2$, $p_{1\#}\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ 在 $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ 中是共轭于 $p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 的子群.

(c) 存在 $\tilde{x}_1\in\widetilde{X}_1$ 和 $\tilde{x}_2\in\widetilde{X}_2$ 使 $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$, 且 $p_{1\#}\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ 在 $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ 中是共轭于 $p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 的子群.

证明 (a)⇒(b) 给定 $f: \widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$ 使 $p_2\circ f=p_1$, 若 $\tilde{x}_1\in\widetilde{X}_1$ 及 $\tilde{x}_2\in\widetilde{X}_2$ 使 $p_1(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$, 则

$$\begin{aligned}p_{1\#}\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)&=p_{2\#}\circ f_\#\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\\&\subset p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)).\end{aligned}$$

因为 $f(\tilde{x}_1)$ 和 $\tilde{x}_2$ 都在 $p_2: \widetilde{X}_2\to X$ 的同一个纤维中, 由定理 2.3.6 得出, $p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, f(\tilde{x}_1))$ 和 $p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 在 $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ 中是共轭的.

(b)⇒(c) 证明是平凡的.

(c)⇒(a) 设 $\tilde{x}_1\in\widetilde{X}_1$ 及 $\tilde{x}_2\in\widetilde{X}_2$ 使 $p(\tilde{x}_1)=p_2(\tilde{x}_2)$, 且 $p_{1\#}\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ 在 $\pi(X, p_1(\tilde{x}_1))$ 中共轭于 $p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. 由定理 2.3.6, 存在点 $\tilde{x}_2'\in\widetilde{X}_2$, 使 $p_2(\tilde{x}_2')=p_2(\tilde{x}_2)$, 并使

$$p_{1\#}\pi(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\subset p_{2\#}\pi(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2').$$

因为 $\widetilde{X}_1$ 是连道局部道路连通空间, 故升腾定理蕴涵使 $p_2\circ f=p_1$ 的映射 $f: (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)\to(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2')$ 的存在. ▌

3. 推论 在连通局部道路连通空间 X 的连通覆叠空间范畴

中两对象等价，当且仅当它们的基本群(基点在 X 上的象点相同)映到 X 的(在这点的)基本群的互相共轭的子群. ∎

下面给出两个例子：

4. 因为 $\pi(S^1)\approx \mathbf{Z}$ 的每个非平凡子群是无限循环的，则由推论 3，每个连通覆叠空间 $\tilde{X}\to S^1$ 等价于 ex: $\mathbf{R}\to S^1$ 或映射 $S^1\to S^1$ 把 z 变成 z^n(对某个正整数 n).

5 对 $n\geqslant 2$, $\pi(P^n)\approx \mathbf{Z}_2$, 且每个连通覆叠空间 $\tilde{X}\to P^n$ 等价于双层覆叠 $S^n\to P^n$ 或平凡覆叠 $P^n\subset P^n$.

连通空间 X 的一个万有覆叠空间是 X 的连通覆叠空间范畴中的一个对象 p: $\tilde{X}\to X$，使对此范畴中的任意对象 p': $\tilde{X}'\to X$，有一态

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{X}' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & X & \end{array}$$

在此范畴中*). 下述结果易由定理 2 及推论 3 得出.

6. 推论 一个连通局部道路连通空间的两个万有覆叠空间是等价的. ∎

另一结果也从定理 2 得到.

7. 推论 一个连通局部道路连通空间 X 的单连通覆叠空间是 X 的万有覆叠空间. ∎

把 X 的连通覆叠空间的比较化为 X 的基本群的相应子群的比较后，我们来解决 X 的基本群的哪些子群对应于覆叠空间. 这就需要构造覆叠空间. 设 X 是一空间，设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 若 $x_0\in X$，设 $\pi(\mathscr{U}, x_0)$ 是 $\pi(X, x_0)$的子群，由形如 $(\omega*\omega')*\omega^{-1}$ 的闭道路代表的同伦类生成，其中，ω' 是闭道路，位于 $\mathscr{U}$ 的某元素中，且 ω 是从 x_0 到 $\omega'(0)$的道路. 容易验证下列命题：

*) 在一些文献中，万有覆叠空间就定义为单连通的覆叠空间. 如本书所指出，这两种定义并不完全重合. 另外，这个定义中把投射 p 叫作"空间"，下文中也常常把作为投射的万有覆叠与作为总空间的万有覆叠空间混为一谈. 如又说是此范畴的对象(覆叠投射)，又说是单连通的(空间). 我们无法逐个严格化，只好原文照译. 请阅读时注意加以区分. ——译注

8. 若 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$，则 $\pi(\mathscr{V}, x_0) \subset \pi(\mathscr{U}, x_0)$. ▮

9. $\pi(\mathscr{U}, x_0)$ 是 $\pi(X, x_0)$ 的正规子群. ▮

10. 若 ω 是 X 中的道路，则

$$h_{[\omega]}\pi(\mathscr{U}, \omega(1)) = \pi(\mathscr{U}, \omega(0)). \text{ ▮}$$

群 $\pi(\mathscr{U}, x_0)$ 同覆叠投射的关系由以下结果说明:

11. **引理** 设 $p: \tilde{X} \to X$ 是覆叠投射，且设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，由所有被 p 平均覆叠的开集组成. 则对任意 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$,

$$\pi(\mathscr{U}, p(\tilde{x}_0)) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

证明 若 ω' 是闭道路，位于 $\mathscr{U}$ 的某元素中，则由引理2.4.9，ω' 的任意升腾是 $\tilde{X}$ 中的闭道路. 从而任意形如 $(\omega * \omega') * \omega^{-1}$ 的道路可升腾到闭道路，其中 ω' 是位于 $\mathscr{U}$ 的某元素中的闭道路[亦即: 升腾到 $(\tilde{\omega} * \tilde{\omega}') * \tilde{\omega}^{-1}$，其中 $\tilde{\omega}$ 和 $\tilde{\omega}'$ 分别是 ω 和 ω' 的适当升腾]. 从而 $\pi(\mathscr{U}, p(\tilde{x}_0))$ 的任一元素有一代表，可升腾到在 $\tilde{x}_0$ 处的闭道路. ▮

下述定理标志出哪些有唯一道路升腾的纤维化是覆叠投射.

12 **定理** 设 $p: \tilde{X} \to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，其中 X 和 $\tilde{X}$ 是连通局部道路连通空间. 则 p 是覆叠投射，当且仅当 X 有一开覆盖 $\mathscr{U}$ 和一点 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$，使

$$\pi(\mathscr{U}, p(\tilde{x}_0)) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

证明 若 p 是覆叠投射，则从引理 11 直接得出结论. 反之，若有这样的开覆盖 $\mathscr{U}$ 和点 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$，则从命题 9 和 10 得出，对任意点 $\tilde{x}_0' \in \tilde{X}$，$\pi(\mathscr{U}, p(\tilde{x}_0')) \subset p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0')$. 应用引理 2.4.9，得出 $\mathscr{U}$ 的任意元素被 p 平均覆叠. ▮

引理 11 给出对 $\pi(X, x_0)$ 的一个子群对应覆叠投射的必要条件. 下一个结果则证明这必要条件也是充分条件.

13. **定理** 设 X 是连通局部道路连通空间，且设 $x_0 \in X$. 设 H 是 $\pi(X, x_0)$ 的子群，且假设存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$，使 $\pi(\mathscr{U}, x_0) \subset H$. 则存在覆叠投射 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 使

$$p_{\#}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H.$$

证明 假设这样的覆叠投射存在，且进一步假设空间 $\tilde{X}$ 是道

路连通的，则(X, x_0)的道路空间的投射φ：$(P(X, x_0), \omega_0)\to(X, x_0)$可升腾为映射$\varphi'$：$(P(X, x_0), \omega_0)\to(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$，它是个满映．若$\omega$和$\omega'$是$P(X, x_0)$的元素，则$\varphi'(\omega)=\varphi'(\omega')$当且仅当$\varphi(\omega)=\varphi(\omega')$且$[\omega*\omega'^{-1}]\in p_*\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)=H$．所以，对于道路连通的$\widetilde{X}$存在在$\widetilde{X}$的点和$P(X, x_0)$的等价类间的一一对应，此等价关系是：若$\omega(1)=\omega'(1)$，则$\omega$等价于$\omega'$．且$[\omega*\omega'^{-1}]\in H$．($H$是子群，便蕴涵了这是个等价关系)．从而自然会想到试用$P(X, x_0)$的那些等价类的集合作为$\widetilde{X}$并且给以适当的拓扑．我们可以着手于$P(X, x_0)$的紧致开拓扑，且用等价类集合上的商拓扑，但这并不比对等价类集合直接给出拓扑更简单，如同下面所做的．

我们考虑X中始于x_0的全体道路的集合．若ω和ω'是两个这种道路，置$\omega\sim\omega'$，若$\omega(1)=\omega'(1)$，且$[\omega*\omega'^{-1}]\in H$．这是个等价关系，且$\omega$的等价类记为$\langle\omega\rangle$．设$\widetilde{X}$是等价类的集合，则存在函数$p$：$\widetilde{X}\to X$使$p(\langle\omega\rangle)=\omega(1)$．若$U$是$X$的开子集，且$\omega$是始于$x_0$且终点在$U$内的道路，则以$\langle\omega, U\rangle$记$\widetilde{X}$的子集，由所有形如$\omega*\omega'$代表的等价类组成，其中$\omega'$是$U$中始于$\omega(1)$的道路．

我们来证明，族$\{\langle\omega, U\rangle\}$是$\widetilde{X}$上的一个拓扑的基．若$\langle\omega'\rangle\in\langle\omega, U\rangle$，则$\omega'\sim\omega*\omega''$对位于$U$中的某道路$\omega''$．若$\bar{\omega}$是$U$中始于$\omega'(1)$的任一道路，则

$$\omega'*\bar{\omega}\sim(\omega*\omega'')*\bar{\omega}\sim\omega*(\omega''*\bar{\omega}),$$

这证明$\langle\omega', U\rangle\subset\langle\omega, U\rangle$．因$\omega\sim\omega'*\omega''^{-1}$，故$\langle\omega\rangle\in\langle\omega', U\rangle$，同样的论证给出$\langle\omega, U\rangle\subset\langle\omega', U\rangle$．从而$\langle\omega, U\rangle=\langle\omega', U\rangle$．所以，若$\omega''\in\langle\omega, U\rangle\cap\langle\omega', U'\rangle$，则$\langle\omega'', U\cap U'\rangle\subset\langle\omega, U\rangle\cap\langle\omega', U'\rangle$．所以族$\{\langle\omega, U\rangle\}$是$\widetilde{X}$上的一个拓扑基．

设对$\widetilde{X}$给以$\{\langle\omega, U\rangle\}$为基的拓扑．则$p$连续；这是因为，若$p(\langle\omega\rangle)\in U$，则$p(\langle\omega, U\rangle)\subset U$．$p$也是开映射，这是因为$p(\langle\omega, U\rangle)$显然等于$U$的包含$\omega(1)$的道路分支，且因为$X$是局部道路连通的，所以这是开的．

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，使 $\pi(\mathscr{U}, x_0)\subset H$，且设 V 是 X 的开的道路连通子集，包含在 $\mathscr{U}$ 的某元素中. 我们来证明，V 被 p 平均覆叠，这将蕴涵 p 是覆叠投射.

若 $\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)$，则 $\langle\omega, V\rangle\subset p^{-1}(V)$. 集合 $\{\langle\omega, V\rangle|\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)\}$ 是开的，且其并集等于 $p^{-1}(V)$. 若 $\langle\omega, V\rangle\cap\langle\omega', V\rangle\neq\emptyset$，设 $\langle\omega''\rangle\in\langle\omega, V\rangle\cap\langle\omega', V\rangle$，则 $\langle\omega'', V\rangle=\langle\omega, V\rangle$，且 $\langle\omega'', V\rangle=\langle\omega', V\rangle$. 从而这些集合 $\{\langle\omega, V\rangle|\langle\omega\rangle\in p^{-1}(V)\}$ 或则彼此重合，或则分离. 为证明 V 被 p 平均覆叠，只要证明 p 把每集合 $\langle\omega, V\rangle$ 双映于 V 上即可(因为 p 已证明是连续的且是开映射). 若 $x\in V$，设 ω' 是 V 中从 $\omega(1)$ 到 x 的道路. 则 $\langle\omega*\omega'\rangle\in\langle\omega, V\rangle$，且 $p(\langle\omega*\omega'\rangle)=x$. 这证明了 p 是满映. 假设

$$p\langle\omega*\omega_1\rangle=p\langle\omega*\omega_2\rangle.$$

则 $\omega_1(1)=\omega_2(1)$，于是 $(\omega*\omega_1)*(\omega*\omega_2)^{-1}$ 是 X 中在 x_0 的闭道路. 也有

$$[(\omega*\omega_1)*(\omega*\omega_2)^{-1}]=[(\omega*(\omega_1*\omega_2^{-1}))*\omega^{-1}].$$

因 $\omega_1*\omega_2^{-1}$ 是 V 中的道路，且 V 包含在 $\mathscr{U}$ 的某元素中，所以

$$[(\omega*(\omega_1*\omega_2^{-1}))*\omega^{-1}]\in\pi(\mathscr{U}; x_0)\subset H.$$

从而 $\omega*\omega_1\sim\omega*\omega_2$，且 $\langle\omega*\omega_1\rangle=\langle\omega*\omega_2\rangle$，这证明 p 是单映.

我们已证明了 $p: \widetilde{X}\to X$ 是覆叠投射. 记 $\tilde{x}_0=\langle\omega_0\rangle$，其中 ω_0 是 X 中在 x_0 的常值道路. 剩下来的只是验证 $p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)=H$. 为此，我们需要对于 X 中始于 x_0 的道路的升腾有一个明晰的表示. 设 ω 是 X 中始于 x_0 的道路. 对 $t\in I$，定义 X 中一个始于 x_0 的道路 ω_t，由 $\omega_t(t')=\omega(tt')$ 给出. 设 $\tilde{\omega}: I\to\widetilde{X}$，由 $\tilde{\omega}(t)=\langle\omega_t\rangle$ 定义. 我们来证明 $\tilde{\omega}$ 是连续的. 若 $\tilde{\omega}(t_0)\in\langle\omega', U\rangle$，则 $p\tilde{\omega}(t_0)=\omega(t_0)\in U$ 且 $\langle\omega', U\rangle=\langle\omega_{t_0}, U\rangle$. 设 N 是 I 中任一开区间包含 t_0，使 $\omega(N)\subset U$. 若 $t\in N$，则 $\omega_t\sim\omega_{t_0}*\omega_{t_0,t}$，其中 $\omega_{t_0,t}(t')=\omega(t_0+t'(t-t_0))$. 所以，对 $t\in N$，

$$\tilde{\omega}(t)=\langle\omega_t\rangle=\langle\omega_{t_0}*\omega_{t_0,t}\rangle\in\langle\omega_{t_0}, U\rangle=\langle\omega', U\rangle.$$

从而 $\tilde{\omega}$ 是连续的. 进一步，$p\tilde{\omega}(t)=\omega_t(1)=\omega(t)$. 从而 $\tilde{\omega}$ 是 ω 的升腾，始于 $\tilde{\omega}(0)=\tilde{x}_0$，终于 $\tilde{\omega}(1)=\langle\omega\rangle$.

若 $[\omega]\in H$，则 $\omega\sim\omega_0$，且 $\langle\omega\rangle=\tilde{x}_0$. 所以 ω 的如上构造出来的升腾 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{X}$ 中在 $\tilde{x}_0$ 的闭道路. 这证明了 $H\subset p_{\#}\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$. 另一方面，若 $\tilde{\omega}'$ 是 $\tilde{X}$ 中在 $\tilde{x}_0$ 的闭道路，且 $p\tilde{\omega}'=\omega$，命 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{X}$ 中上述构造的道路. 因为 $\tilde{\omega}$ 是 ω 的始于 $\tilde{x}_0$ 的升腾，则从 p 的唯一道路升腾得出 $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}'$. 所以 $\tilde{\omega}(1)=\tilde{\omega}'(1)=\tilde{x}_0$. 因为 $\tilde{\omega}(1)=\langle\omega\rangle$，所以 $\omega\sim\omega_0$，这证明了 $p_{\#}\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)\subset H$. ▌

空间 X 半局部单连通(定义在§2.4中)，当且仅当存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 使 $\pi(\mathscr{U},x_0)=0$. 从而有下述结果:

14. 推论 连通局部道路连通空间 X 有单连通覆叠空间，当且仅当 X 是半局部单连通的. ▌

从推论 14 和 6 以及定理 2 可得到下一个结果:

15. 推论 一个连通局部道路连通半局部单连通的空间的任一万有覆叠空间是单连通的. ▌

并非每个连通局部道路连通空间都有万有覆叠空间. 下面给出两个例子:

16. 1 维球的无限积没有万有覆叠空间.

17. 设 X 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间，等于圆周 $C_n(n\geqslant1)$ 的并，其中 C_n 的圆心为 $\left(\frac{1}{n},0\right)$，半径为 $\frac{1}{n}$. 则 X 连通局部道路连通，但没有万有覆叠空间.

一个连通局部道路连通空间有非单连通的万有覆叠是可能的. 下面提供一个例子.

18. 例 设 Y_1 是以例 17 的空间 X 为底的锥形，[Y_1 可想象为 $\boldsymbol{R}^3$ 中联接 X 的点与点 $(0,0,1)$ 的线段的集合*)]，设 y_1 是 X 的所有圆相切的点. 设 (Y_2,y_2) 是与 (Y_1,y_1) 相同的另一个点标空间. 设 $Z=Y_1\vee Y_2$. 则 Z 是连通且局部道路连通但不单连通的(见第 1 章习题 G.7，一个从 Y_1 到 Y_2 轮流向后和向前摆动绕圆 C_n 的闭道路非零伦). 然而，Y_1 和 Y_2 两个都是 Z 的闭可缩子集. 由升腾定理，这两个皆可升腾到 Z 的任一覆叠空间，使得

*) 各线段上全体点的集合. ——译注

y_1 被随意升腾且 y_2 被随意升腾. 所以以 Z 为底的任一覆叠投射有截面. 这得出 Z 的任一覆叠空间同胚于 Z.

在一固定的道路连通底空间上具有唯一道路升腾(并具有道路连通的总空间)的纤维化范畴中已存在一个万有对象(即一个对象,它到此范畴中任意其它对象有态). 我们来提出这个事实的证明. 设 X 是道路连通空间,且设 $\mathscr{X}(X)$ 是拓扑空间族, 这些拓扑空间所基于的集合是 X 同 X 的基本群的某子群的右陪集集合的乘积. 由定理 2.3.9 可得,任意以 X 为底空间且总空间道路连通的纤维化等价于一纤维化 $\tilde{X}\to X$, 其中 $\tilde{X}\in\mathscr{X}(X)$. 因 $\mathscr{X}(X)$ 是个集合,则有唯一道路升腾的那些纤维化 $\tilde{X}\to X$ 构成一集合, 其中 $\tilde{X}$ 是 $\mathscr{X}(X)$ 中的道路连通空间. 我们可以形成这个集合中的纤维积(如 §2.2 中). 这纤维积即是所需的有唯一道路升腾的万有的纤维化.

若 X 是连通局部道路连通空间, 则从定理 13 得出, 对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 X 的一个道路连通覆叠空间, 其基本群同构于 $\pi(\mathscr{U}, x_0)$. 这蕴涵着若 $\tilde{X}$ 是 X 上有唯一道路升腾的道路连通纤维化范畴中的万有对象, 则 $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 同构于 $\bigcap_{\mathscr{U}}\pi(\mathscr{U}, x_0)$ 的一子群. 特别地,若 $\bigcap_{\mathscr{U}}\pi(\mathscr{U},x_0)=0$, 则 X 有一单连通的有唯一道路升腾的纤维化, 它是这范畴中的一个万有对象. 这样, 例 16 和 17 中的两个空间都有万有的有唯一道路升腾的纤维化, 都为单连通. 例 18 的空间 Z 是其自己的万有的有唯一道路升腾的纤维化.

§6 覆叠变换

本节考虑前节问题的逆问题. 前节中曾对给定的底空间构造覆叠投射,现在则要对给定的覆叠空间找覆叠投射.对任意正则覆叠空间我们证明存在一个覆叠变换群. 于是覆叠投射等价于覆叠空间到覆叠变换群的轨道空间的投射.

设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 显然存在这个纤维化的自等价群(一个自等价是一个自同胚 $f: \tilde{X}\to\tilde{X}$, 使 $p\circ f=$

p)．我们记该群为$G(\widetilde{X}|X)$．在p: $\widetilde{X}\to X$是覆叠投射的情况下，$G(\widetilde{X}|X)$也称为p的*覆叠变换群*．一般地说，$G(\widetilde{X}|X)$密切相似于一个扩张域的保持点态不动的子域的自同构群．

若X是道路连通的，则从引理2.2.4得出，p: $\widetilde{X}\to X$的两个在一点上重合的自等价是恒同的．从而有下述引理：

1．引理 *设p: $\widetilde{X}\to X$是有唯一道路升腾的纤维化．若$\widetilde{X}$是道路连通的，且$\tilde{x}_0\in\widetilde{X}$，则函数$f\mapsto f(\tilde{x}_0)$是$G(\widetilde{X}|X)$到$p$在$p(\tilde{x}_0)$上的纤维的单映．* ▌

定理2.3.9建立了从$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$在$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中的右陪集的集合到$p$在$p(\tilde{x}_0)$上的纤维的双映．把此双映的逆与引理1中的函数合成，得到一个单映ψ，是从$G(\widetilde{X}|X)$到$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$在$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中的右陪集的集合的．$\psi$明确定义如下：对任意$f\in G(\widetilde{X}|X)$，设$\tilde{\omega}$是$\widetilde{X}$中从$\tilde{x}_0$到$f(\tilde{x}_0)$的道路．则$p\circ\tilde{\omega}$是$X$中在$p(\tilde{x}_0)$的闭道路，且右陪集$(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))[p\circ\tilde{\omega}]$是不依赖于$\tilde{\omega}$的选择的．函数$\psi$把$f$变为这个右陪集．

给定$\tilde{x}_0\in\widetilde{X}$，设$N(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$是$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$在$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$中的正规化子，这样，$N(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$是$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$的子群，由使$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$在其共轭作用下不变的那些元$[\omega]\in\pi(X, p(\tilde{x}_0))$组成．$N(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$是$\pi(X, p(\tilde{x}_0))$的包含$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$作为正规子群的最大子群．

2．定理 *设p: $\widetilde{X}\to X$是有唯一道路升腾的纤维化．设$\widetilde{X}$是道路连通的，且设$\tilde{x}_0\in\widetilde{X}$．则$\psi$是从$G(\widetilde{X}|X)$到商群$N(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))/p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$的单同态．若$\widetilde{X}$也是局部道路连通的，则$\psi$是一个同构．*

证明 我们已知ψ是一个单映．现在来说明ψ是从$G(\widetilde{X}|X)$到$p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$在$N(p_{\#}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$中的右陪集的集合的函数．若$\tilde{\omega}$是$\widetilde{X}$中从$\tilde{x}_0$到$f(\tilde{x}_0)$的道路，则存在交换方形

$$\begin{array}{ccc}\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) & \xleftarrow{h_{[\tilde{\omega}]}} & \pi(\widetilde{X}, f(\tilde{x}_0)) \\ {\scriptstyle p_{\#}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\#}} \\ \pi(X, p(\tilde{x}_0)) & \xleftarrow{h_{[p\circ\tilde{\omega}]}} & \pi(X, p(\tilde{x}_0)).\end{array}$$

因为$f:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(\widetilde{X},f(\widetilde{x}_0))$是同胚，故

$$f_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\pi(\widetilde{X},f(\widetilde{x}_0)).$$

又因$p_*f_*=p_*$，故

$$\begin{aligned}&h_{[p\circ\widetilde{\omega}]}p_*\pi(\widetilde{X},f(\widetilde{x}_0))\\&=h_{[p\circ\widetilde{\omega}]}p_*f_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=h_{[p\circ\widetilde{\omega}]}p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\\&=p_*h_{[\widetilde{\omega}]}\pi(\widetilde{X},f(\widetilde{x}_0))=p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0).^{*)}\end{aligned}$$

从而$[p\circ\widetilde{\omega}]\in N(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$。因为$\psi(f)$等于右陪集$(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))[p\circ\widetilde{\omega}]$，故$\psi$是$G(\widetilde{X}|X)$到$p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$在$N(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$中的右陪集的集合的单映.

我们现在来核实ψ是同态．若$f_1,f_2\in G(\widetilde{X}|X)$，设$\widetilde{\omega}_1$和$\widetilde{\omega}_2$是$\widetilde{X}$中从$\widetilde{x}_0$分别到$f_1(\widetilde{x}_0)$和$f_2(\widetilde{x}_0)$的道路，则$f_1\circ\widetilde{\omega}_2$是从$f_1(\widetilde{x}_0)$到$f_1f_2(\widetilde{x}_0)$的道路，且$\widetilde{\omega}_1*(f_1\circ\widetilde{\omega}_2)$是从$\widetilde{x}_0$到$f_1f_2(\widetilde{x}_0)$的道路.所以$\psi(f_1f_2)$是右陪集

$$\begin{aligned}&(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))[(p\circ\widetilde{\omega}_1)*(p\circ f_1\circ\widetilde{\omega}_2)]\\&=(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))[p\circ\widetilde{\omega}_1]*[p\circ\widetilde{\omega}_2],\end{aligned}$$

这等于$\psi(f_1)\psi(f_2)$.

最后，我们证明若$\widetilde{X}$是局部道路连通的，则ψ是到$p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$在$N(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$中的右陪集的集合的满同态．假设$[\omega]\in\pi(X,p(\widetilde{x}_0))$是属于$N(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$的．设$\widetilde{\omega}$是$\omega$的终于$\widetilde{x}_0$的升腾，且设$\widetilde{x}=\widetilde{\omega}(0)$．则

$$\begin{aligned}p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)&=h_{[\omega]}(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))\\&=p_*(h_{[\widetilde{\omega}]}\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))=p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}).\end{aligned}$$

因为X连通局部道路连通，故升腾定理蕴涵映射$f:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(\widetilde{X},\widetilde{x})$及$g:(\widetilde{X},\widetilde{x})\to(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$使得$p\circ f=p$和$p\circ g=p$的存在.从唯一升腾性质(引理2.2.4)，可推出$f\circ g=1_{\widetilde{X}}$和$g\circ f=1_{\widetilde{X}}$．所以$f\in G(\widetilde{X}|X)$，且$\psi(f)$等于右陪集$(p_*\pi(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))[\omega]^{-1}$. ▌

综合定理2与定理2.3.12，得以下推论：

3．推论 设$p:\widetilde{X}\to X$是有唯一道路升腾的纤维化．若$\widetilde{X}$

---

*) 这个由五个群和四个等号组成的连等式读来费解．如将第一个群和第三个群互换位置，则每个等号皆有理由，且得到下边的结论．——译注

是连通局部道路连通的，且 $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$，则 p 是正则的，当且仅当 $G(\tilde{X}|X)$ 是在 p 的每个纤维上可迁的．在此情况下，

$$\psi: G(\tilde{X}|X)\approx\pi(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\pi(X, \tilde{x}_0). \blacksquare$$

若 $\tilde{X}$ 是单连通的，则任意纤维化 $p: \tilde{X}\to X$ 是正则的，且我们也有下一个结果：

4．推论 设 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的纤维化，其中 $\tilde{X}$ 是单连通的，且非空．则 p 的自等价群同构于 X 的基本群．∎

若 $p: \tilde{X}\to X$ 是正则覆叠投射，且 $\tilde{X}$ 是连通局部道路连通的，则 X 同胚于 $G(\tilde{X}|X)$ 的轨道空间（作用在集合 S 上的变换群 G 的一个轨道，是 S 的一个等价类，相对于这个等价关系：$s_1\sim s_2$，若存在 $g\in G$，使 $gs_1=s_2$）．我们的兴趣在于其逆问题——亦即：想要知道关于拓扑空间 Y 的同胚群 G 的哪些条件会保证 Y 到轨道空间 Y/G 的投射是正则覆叠投射，且覆叠变换群等于 G．

拓扑空间 Y 的一个同胚群 G 称为**间断的**，若 G 在 Y 中的轨道是 Y 的离散子集．G 称为**真间断的**，若对 $y\in Y$，存在 y 在 Y 中的开邻域 U，使得若 $g, g'\in G$，且 gU 与 $g'U$ 相交，则 $g=g'$．G 作用无不动的点，若 G 仅有唯一的元素有不动点，此唯一元素就是单位元素．下列结论都是明显的．

5． 真间断的同胚群是间断的，且作用无不动点．∎

6． 一个有限的同胚群作用在 Hausdorff 空间上，若无不动点，则是真间断的．∎

若 G 是一个覆叠投射的覆叠变换群，则用简单的验证即可说明，G 是真间断的．下面证明，任一真间断的同胚群确定一个覆叠投射．

7 定理 设 G 是空间 Y 的真间断的同胚群．则 Y 到轨道空间 Y/G 的投射是覆叠投射．若 Y 是连通的，则此覆叠投射是正则的，且 G 是其覆叠变换群．

证明 设 $p: Y\to Y/G$ 是投射，则 p 是连续的．p 是开映射，因为若 U 是 Y 的开集，则 $p^{-1}(p(U))=\cup\{gU|g\in G\}$ 在 Y 中是开的，且从而 pU 在 Y/G 中是开的．设 U 是 Y 的开子集，使得只要

gU 与 $g'U$ 相交,就有 $g=g'$. 我们来证明 $p(U)$ 被 p 平均覆叠. 在 U 上的假设保证了$\{gU|g\in G\}$是开集的分离族,其并为 $p^{-1}p(U)$. 则只要证明 $p|gU$ 是从 gU 到 $p(U)$ 的双映即可. 若 $y\in U$, 则 $p(gy)=p(y)$, 从而 $p(gU)=p(U)$. 若 $p(gy_1)=p(gy_2)$, 其中 y_1, $y_2\in U$,则存在 $g'\in G$, 使得 $gy_1=g'gy_2$. 所以 gU 与 $g'gU$ 相交,故 $g=g'g$. 从而 $g'=1_Y$, 且从而 $gy_1=gy_2$. 于是证明了 p 是 gU 到 $p(U)$ 上的同胚. 因为 G 是真间断的, 故集合 $p(U)$ 被 p 平均覆叠,所有这些 $p(U)$ 构成了 Y/G 的开覆盖.

因为 $p(gy)=p(y)$,故我们看到 G 包含于 p 的覆叠变换群中. 因为 G 在 p 的纤维上是可迁的,故由定理 2.2.2 得出,若 Y 是连通的,则 G 等于其覆叠变换群. 因为覆叠变换群在每个纤维上是可迁的,故此覆叠映射是正则的. ▌

8. 推论 设 G 是单连通空间 Y 的一个真间断的同胚群. 则轨道空间 Y/G 的基本群同构于 G.

证明 由定理 7, G 是正则覆叠投射 $p: Y\to Y/G$ 的覆叠变换群. 由定理 2, ψ 是 G 到 Y/G 的基本群的单同态. 因为 G 在 p 的纤维上是可迁的,所以 ψ 是同构. ▌

9. 例 设

$$S^3=\{(z_0, z_1)\in C^2|\,|z_0|^2+|z_1|^2=1\},$$

且设 p 和 q 是互素的整数. 定义 $h: S^3\to S^3$, 使

$$h(z_0, z_1)=(e^{2\pi i/p}z_0,\ e^{2\pi qi/p}z_1).$$

则 h 是 S^3 的以 p 为周期的同胚(亦即: $h^p=1$). 又 $\boldsymbol{Z}_p$ 作用于 S^3 上,使

$$\bar{n}(z_0, z_1)=h^n(z_0, z_1),$$

其中 $\bar{n}$ 记整数 n 的 mod p 的同余类. 以此方式, $\boldsymbol{Z}_p$ 作用于 S^3 上无不动点. $\boldsymbol{Z}_p$ 在 S^3 上的这个作用的轨道空间称为透镜空间, 且记以 $L_{(p,q)}$. 由命题 6 及推论 8, $L_{(p,q)}$ 的基本群同构于 $\boldsymbol{Z}_p$.

10. 例 设

$$S^{2n+1}=\{(z_0, z_1, \cdots, z_n)\in C^{n+1}|\sum|z_i|^2=1\},$$

且设 $q_1, \cdots, q_n$ 是整数,皆与 p 互素. 定义 $h: S^{2n+1}\to S^{2n+1}$,使

$$h(z_0, z_1, \cdots, z_n) = (e^{2\pi i/p}z_0, e^{2\pi q_1 i/p}z_1, \cdots, e^{2\pi q_n i/p}z_n).$$

则如同例9，h 决定了 $\boldsymbol{Z}_p$ 在 S^{2n+1} 上的作用，且无不动点；其轨道空间称为广义透镜空间，且记作 $L_{(p, q_1, \cdots, q_n)}$。其基本群同构于 $\boldsymbol{Z}_p$。

我们能够应用定理7来阐明，投射 $Y \to Y/G$ 即使不是覆叠投射时，也是个正则的有唯一道路升腾的纤维化。注意，若 G 作用于 Y 无不动点，则 G 的任意子群当然也如此；又若 G' 是 G 的正规子群，则 G/G' 作用于 Y/G' 上无不动点。

11. 定理 设 G 是道路连通空间 Y 上的同胚群，其作用无不动点。又假设存在子群的递降叙列

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \cdots$$

使得

(a) $\cap G_n = \{1_Y\}$；

(b) G_{n+1} 是 $G_n (n \geqslant 0)$ 的正规子群；

(c) G_n/G_{n+1} 是在 Y/G_{n+1} 上真间断的同胚群，且投射 $Y \to Y/G_n (n \geqslant 0)$ 是闭映射；

(d) Y 的任意轨道在 $G_n (n \geqslant 0)$ 上是紧致的。

则投射 $p: Y \to Y/G$ 是正则的有唯一道路升腾的纤维化，其自等价群是 G。

证明 因 $Y/G_n = (Y/G_{n+1})/(G_n/G_{n+1})$，则从(c)和定理7得出，映射

$$p_{n+1}: Y/G_{n+1} \to Y/G_n$$

是正则的覆叠投射（对 $n \geqslant 0$）。设

$$\tilde{Y} = \{(y_n) \in \times (Y/G_n) \mid p_{n+1}(y_{n+1}) = y_n, \text{对 } n \geqslant 0\},$$

且定义 $\tilde{p}: \tilde{Y} \to Y/G$ 由 $\tilde{p}((y_n)) = y_0$。容易验证 $\tilde{p}$ 是有唯一道路升腾的纤维化（它是映射 $\{p_1 \circ \cdots \circ p_j\}$ 的纤维积）。

对 $n \geqslant 0$ 存在连续闭投射 $\varphi_n: Y \to Y/G_n$，使得 $p_{n+1} \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n$。所以存在连续闭映射 $\varphi: Y \to \tilde{Y}$ 由 $\varphi(y) = (\varphi_n(y))$ 定义，且使得 $\tilde{p} \circ \varphi = p$。为了证明 φ 是同胚，只要证明它是双映即可。若 $\varphi(y) = \varphi(y')$，则对 $n \geqslant 0$ 存在 $g_n \in G_n$，使 $y = g_n y'$。则对所有的 m 与 n，$g_n y' = g_m y'$。因 G 作用无不动点，对于所有的 m 和 n，$g_m = g_n$。

所以 $g_n \in G_m$（对所有 m）. 又由 (a), $g_n = 1_Y$. 于是 $y = y'$, 从而 φ 是单映.

若 $(y_n) \in \tilde{Y}$, 则 $\varphi_n^{-1} y_n$ 是 Y 在 G_n 作用下的轨道. 由 (d), $\varphi_n^{-1} y_n$ 是紧致的. 因为

$$\varphi_n^{-1} y_n = \varphi_{n+1}^{-1} p_{n+1}^{-1} y_n \supset \varphi_{n+1}^{-1} y_{n+1},$$

故族 $\{\varphi_n^{-1} y_n\}$ 由具有有限交性质的紧致集合组成. 所以 $\bigcap \varphi_n^{-1} y_n \neq \emptyset$. 若 $y \in \bigcap \varphi_n^{-1} y_n$, 则 $\varphi(y) = (y_n)$, 这说明 φ 是满映.

我们已证明了 $\varphi: Y \to \tilde{Y}$ 是同胚. 所以 $p: Y \to Y/G$ 是有唯一道路升腾的纤维化. 因为 G 的每个元素是 p 的自等价, 故 p 的自等价群在每个纤维上是可迁的. 由推论 3, p 是正则的纤维化, 且 G 是 p 的自等价群. ▮

§7 纤维丛

覆叠空间局部是其底空间和一离散空间的积. 推广之, 便得到本节定义的纤维丛的概念, 因为纤维丛局部地是其底空间和纤维的积. 本节主要结果是纤维丛的丛投射是个纤维化*).

一个纤维丛 $\xi = (E, B, F, p)$ 由总空间 E、底空间 B、纤维 F 和丛投射 $p: E \to B$ 组成, 使得存在 B 的开覆盖 $\{U\}$, 对每 $U \in \{U\}$, 有一同胚 $\varphi_U: U \times F \to p^{-1}(U)$, 使合成

$$U \times F \xrightarrow{\varphi_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$$

是到第一个因子的投射. 这样, 丛投射 $p: E \to B$ 和投射 $B \times F \to B$ 是局部等价的. 设 $b \in B$, b 上的纤维定义为 $p^{-1}(b)$, 且注意到 F 同胚于每个 $b \in B$ 上的 $p^{-1}(b)$. 通常对于丛也有一给定的构造群 G, 由 F 的一些同胚组成, 定义此概念如下:

设 G 是 F 的一个同胚群. 给定一个空间 F' 和从 F 到 F' 的同胚族 $\Phi = \{\varphi: F \to F'\}$, 定义 $\varphi g: F \to F'$ 对 $\varphi \in \Phi$ 及 $g \in G$, 使

---

*) 关于纤维丛的一般理论, 见 N. E. Steenrod: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951. ——原注

较近代的著作有 D. Husemoller: *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, 1975 (第二版). ——译注

$\varphi g(y)=\varphi(gy)$ 对 $y\in F$. 族 Φ 称为 F' 上的一个 G 构造，若

(a) 给出 $\varphi\in\Phi$ 及 $g\in G$，则 $\varphi g\in\Phi$；

(b) 给出 $\varphi_1, \varphi_2\in\Phi$，有 $g\in G$ 使 $\varphi_1=\varphi_2 g$.

条件(a)蕴涵 G 从右边作用于 Φ 上，条件(b)蕴涵 G 在 Φ 上的作用是可迁的．一个纤维丛 (E, B, F, p) 称为有构造群 G，若每纤维 $p^{-1}(b)$ 有一个 G 构造 $\Phi(b)$，使得存在 B 的开覆盖 $\{U\}$，且对每个 $U\in\{U\}$，有同胚 $\varphi_U: U\times F\to p^{-1}(U)$ 使得对于 $b\in U$，变 x 为 $\varphi_U(b, x)$ 的映射 $F\to p^{-1}(b)$ 在 $\Phi(b)$ 中．显然，一个给定的纤维丛总能以 F 的所有同胚作成的群为构造群来给出纤维丛的构造．同样显然，一个给定的纤维丛有时能够以 F 的两个不同的同胚群为构造群来给出纤维丛的构造．

一个 n 维面丛，或实向量丛，是个纤维丛，其纤维是 $\boldsymbol{R}^n$，构造群是一般线性群 $GL(\boldsymbol{R}^n)$，由 $\boldsymbol{R}^n$ 的所有线性自同构组成．一个复 n 维面丛，或复向量丛，是个纤维丛，其纤维是 $\boldsymbol{C}^n$，且其构造群是 $GL(\boldsymbol{C}^n)$．

下面给出一些例子：

1．对于空间 B 和 F，积丛是纤维丛 $(B\times F, B, F, p)$，其中 $p: B\times F\to B$ 是到第一个因子的投射(以平凡群为构造群)．

2．给定 $p: \widetilde{X}\to X$ 是一覆叠投射，X 是连通空间．若 $x_0\in X$，则 $(\widetilde{X}, X, p^{-1}(x_0), p)$ 是纤维丛(若 X 是道路连通的，它能给出纤维丛的构造，且构造群是 $\pi(X, x_0)$，作用在 $p^{-1}(x_0)$ 上使 $[\omega]\tilde{x}=\tilde{x}[\omega]^{-1}$，其右端同定理 2.3.9 的证明中)．

3．给定 M 是可微的 n 维流形，且 $T(M)$ 是 M 的所有切向量的集合，则有纤维丛 $(T(M), M, \boldsymbol{R}^n, p)$，其中 $p: T(M)\to M$ 把每个切向量变到其始点．这叫作切丛，记作 $\tau(M)$．因为可给它以构造群 $GL(\boldsymbol{R}^n)$，故为 n 维面丛；若 M 是复维数 m 的复流形，则 $\tau(M)$ 是复 m 维面丛．

4．给定李群 G 的一个闭子群 H，G/H 是左陪集的商空间，且 $p: G\to G/H$ 是投射．则 $(G, G/H, H, p)$ 是纤维丛(构造群 H 由左平移作用于自身上)．

5. 把 S^n 表为闭半球 E^n_- 和 E^n_+ 的并，其交为 S^{n-1}，且设 G 是空间 F 的一个同胚群. 给定一映射 φ: $S^{n-1}\to G$ 使映射 $S^{n-1}\times F\to F$ 变 (x, y) 到 $\varphi(x)y$ 为连续的，设 E_φ 是由 $(E^n_-\times F)\vee(E^n_+\times F)$ 经过叠合 $(x, y)\in E^n_-\times F$ 和 $(x, \varphi(x)y)\in E^n_+\times F$ $(x\in S^{n-1}, y\in F)$ 所得的空间. 这些叠合对投射 $E^n_-\times F\to E^n_-$ 及 $E^n_+\times F\to E^n_+$ 是相容的. 所以有一映射 p_φ: $E_\varphi\to S^n$ 使合成

$$E^n_-\times F\to E_\varphi\xrightarrow{p_\varphi}S^n \quad 与 \quad E^n_+\times F\to E_\varphi\xrightarrow{p_\varphi}S^n$$

皆为到第一个因子的投射. 于是 $(E_\varphi, S^n, F, p_\varphi)$ 是纤维丛(以 G 为构造群)，称为由示性映射 φ 所定义的.

6. 设 $P_n(C)$ 是 n 维复射影空间，由齐次坐标给出坐标. 若 $z_0, z_1, \cdots, z_n\in C$ 不全为 0，设 $[z_0, z_1, \cdots, z_n]\in P_n(C)$ 是 $P_n(C)$ 的具有齐次坐标 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的点. 视 S^{2n+1} 为集合

$$\{(z_0, z_1, \cdots, z_n)\in C^{n+1}|\sum|z_i|^2=1\},$$

且定义 p: $S^{2n+1}\to P_n(C)$ 使

$$p(z_0, z_1, \cdots, z_n)=[z_0, z_1, \cdots, z_n].$$

若 $U_i\subset P_n(C)$ 是第 i 个坐标非 0 的点组成的子集，易见 $p^{-1}(U_i)$ 同胚于 $U_i\times S^1$. 所以有纤维丛 $(S^{2n+1}, P_n(C), S^1, p)$(构造群 S^1 左平移作用于自身上). 这叫作 Hopf 丛.

7. 若 Q 是四元数除环，则存在类似的映射 p: $S^{4n+3}\to P_n(Q)$，且有一个四元数 Hopf 丛 $(S^{4n+3}, P_n(Q), S^3, p)$(有构造群 S^3 左平移作用在自身上).

对我们的目的来说，构造群不是重要的. 这样我们定义的一 n 维球丛是个纤维丛，其纤维为 S^n[习惯上也要求以 $GL(R^{n+1})$ 中的所有保距的正交群 $0(n+1)$ 为构造群]. 若 ξ 是个 n 维球丛，记其总空间为 $\dot{E}_\xi$. 从投射 $\dot{E}_\xi\to B$ 的映射柱是纤维丛 $(E_\xi, B, E^{n+1}, p_\xi)$ 的总空间 E_ξ，其中 p_ξ: $E_\xi\to B$ 为映射柱到 B 的收缩(且 $p_\xi|\dot{E}_\xi$: $\dot{E}_\xi\to B$ 是原来的丛投射).

若 $\xi=(E, B, R^{n+1}, p)$ 是个 $(n+1)$ 维面丛，有构造群 $0(n+1)$，在每个纤维 $p^{-1}(b)$ 中引入一个度量是可能的. 在 E 中具有单位度量的全体元素组成的子集 $E'\subset E$ 是个 n 维球丛 $(E'$,

$B, S^n, p|E')$的总空间，这个 n 维球丛称为 ξ 的单位球丛．若一个$(n+1)$维面丛的底空间 B 是拟紧致 Hausdorff 空间，该丛总可以给出 $O(n+1)$ 为其构造群．特别地，一个拟紧致可微流形有一个单位切丛．

具有相同纤维和相同底的两个纤维丛(E_1, B, F, p_1)和(E_2, B, F, p_2)称为等价的，若有一同胚 $h: E_1 \to E_2$ 使 $p_2 \circ h = p_1$．若二者都有构造群 G，它们在 G 上是等价的，若有同胚 h 如上，再加上个附加性质：若 $\varphi \in \Phi_1(b)$，则 $h \circ \varphi \in \Phi_2(b)$（对 $b \in B$）．一个纤维丛叫作平凡的，若它等价于例 1 中的积丛（或等价地，若它可以以平凡群为构造群）．

考察例 2，纤维丛相对于覆叠空间，与纤维化相对于有唯一道路升腾的纤维化，几乎是用同样方式的．本节余下部分用于证明，一个纤维丛(E, B, F, p)，若其底空间 B 是拟紧致的 Hausdorff 空间，则 p 是纤维化．

映射 $p: E \to B$ 称为局部纤维化，若存在 B 的一开覆盖 $\{U\}$，使 $p|p^{-1}(U): p^{-1}(U) \to U$ 是纤维化（对每个 $U \in \{U\}$）．显然，纤维化是局部纤维化[*]，且任意丛投射是局部纤维化．

给定一映射 $p: E \to B$，我们定义子空间 $\overline{B} \subset B \times B^I$ 为

$$\overline{B} = \{(e, \omega) \in E \times B^I \mid \omega(0) = p(e)\}.$$

则存在映射 $\overline{p}: E^I \to \overline{B}$ 使 $\overline{p}(\omega) = (\omega(0), p \circ \omega)$（对 $\overline{\omega}: I \to E$）．$p$ 的一个升腾函数是 $\overline{p}$ 的一右逆映射

$$\lambda: \overline{B} \to E^I.$$

这样一升腾函数变每点 $e \in E$ 和 B 的始于 $p(e)$ 的道路 ω 到 E 中始于 e 的道路 $\lambda(e, \omega)$，亦即 ω 的升腾．升腾函数和纤维化之间的关系包含在下述定理中．

8．定理 映射 $p: E \to B$ 是纤维化，当且仅当存在对 p 的升腾

---

[*] 对一拟紧致 Hausdorff 空间 B 的逆命题的证明可查 W. Hurewicz: On the concept of fibre space, Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., Vol. 41, 956～951(1955)．另一证明可查 W. Huebsch: On the covering homotopy theorem, Ann. of Math., Vol. 61, 555～563(1955)．推广及有关的问题处理在 A. Dold: Partitions of unity in the theory of fibrations, Ann. of Math., Vol. 78, 223～255(1963)．——原注

函数.

证明 此证明免不了要多次使用引言的定理 2.8. 若 p 是纤维化,设 $f'\colon \bar{B}\to E$ 及 $F\colon \bar{B}\times I\to B$ 由

$$f'(e, \omega)=e,\ F((e, \omega), t)=\omega(t)$$

定义. 则

$$F((e, \omega), 0)=\omega(0)=p(e)=(p\circ f')(e, \omega).$$

由 p 的同伦升腾性质,存在映射 $F'\colon \bar{B}\times I\to E$,使

$$F'((e, \omega), 0)=f'(e, \omega)=e \quad 及 \quad p\circ F'=F.$$

F' 为 p 定义了升腾函数 λ 使 $\lambda(e, \omega)(t)=F'((e, \omega), t)$.

反之,若 λ 是对 p 的升腾函数,设 $f'\colon X\to E$ 及 $F\colon X\times I\to B$ 是使 $F(x, 0)=pf'(x)$ 的映射. 设 $g\colon X\to B^I$ 由 $g(x)(t)=F(x, t)$ 定义. 则有映射 $F'\colon X\times I\to E$ 使得

$$F'(x, t)=\lambda(f'(x), g(x))(t).$$

因为 $F'(x, 0)=f'(x)$,且 $p\circ F'=F$,故 p 有同伦升腾性质. ▌

设 $p\colon E\to B$,并设 W 是 B^I 的子集. 设 $\widetilde{W}$ 由

$$\widetilde{W}=\{(e, \omega, s)\in E\times W\times I \mid \omega(s)=p(e)\}$$

所定义. W 上的一个扩充升腾函数是映射

$$\Lambda\colon \widetilde{W}\to E^I,$$

使 $p(\Lambda(e, \omega, s)(t))=\omega(t)$ 及 $\Lambda(e, \omega, s)(s)=e$. 这样,扩充升腾函数是个函数,它把道路升腾到 E 的通过一给定点且有一给定参数值的道路. 期望在升腾函数和扩充升腾函数的存在性之间有下述关系,是合理的.

9. 引理 *映射 $p\colon E\to B$ 有升腾函数,当且仅当在 B^I 上存在扩充升腾函数.*

证明 若 Λ 是 B^I 上的一个扩充升腾函数,则对 p 的一个升腾函数 λ 由 $\lambda(e, \omega)=\Lambda(e, \omega, 0)$ 给出.

为了证明其逆,给定 B 中的道路 ω,设 ω_s 和 ω^s 是 B 中的道路,由

$$\omega_s(t)=\begin{cases}\omega(s-t) & (0\leqslant t\leqslant s)\\ \omega(0) & (s\leqslant t\leqslant 1)\end{cases}$$

$$\omega^s(t)=\begin{cases}\omega(s+t) & (0\leqslant t\leqslant 1-s)\\ \omega(1) & (1-s\leqslant t\leqslant 1)\end{cases}$$

所定义．映射 $(\omega, s)\to\omega_s$ 及 $(\omega, s)\to\omega^s$ 是连续映射 $B^I\times I\to B^I$．给定对 p 之升腾函数 λ：$\bar{B}\to E^I$．我们定义在 B^I 上的一个扩充升腾函数 Λ，使

$$\Lambda(e, \omega, s)(t)=\begin{cases}\lambda(e, \omega_s)(s-t) & (0\leqslant t\leqslant s)\\ \lambda(e, \omega^s)(t-s) & (s\leqslant t\leqslant 1).\ \blacksquare\end{cases}$$

证明局部纤维化是纤维化的主要步骤是在 B^I 的不同的开子集上一起配备上扩充升腾函数．为此，我们需要一个附加概念．空间 X 的覆盖 $\{W\}$ 称为可数的，若它是局部有限的，且对每个 W，存在函数 f_W：$X\to[0, 1]$，使 $W=\{x\in X\,|\,f_W(x)\neq 0\}$．[*)]

10．引理 *设 p：$E\to B$ 是映射，若 B^I 有一个可数覆盖 $\{W_j\}$，使对每 j 存在 W_j 上的扩充升腾函数，则对于 p 有升腾函数．*

证明　设指标集为 $J=\{j\}$，且对每个 j 设 f_j：$B^I\to I$ 是映射，使 $W_j=\{\omega\in B^I\,|\,f_j(\omega)\neq 0\}$．对任意子集 $\alpha\subset J$，设 $W_\alpha=\bigcup\limits_{j\in\alpha}W_j$，并定义 f_α：$B^I\to\mathbf{R}$ 使

$$f_\alpha(\omega)=\sum_{j\in\alpha}f_j(\omega),$$

(这是个有限和，且是连续的，因 $\{W_j\}$ 是局部有限的)．则 $f_\alpha(\omega)\geqslant 0$(对于 $\omega\in B^I$)，且

$$W_\alpha=\{\omega\in B^I\,|\,f_\alpha(\omega)\neq 0\}.$$

我们定义 $\bar{B}_\alpha=\{(e, \omega)\in\bar{B}\,|\,\omega\in W_\alpha\}$．

考虑偶 (α, λ_α) 的集合，其中 $\alpha\subset J$，且 λ_α：$\bar{B}_\alpha\to E^I$ 是在 $\bar{B}_\alpha$ 上的升腾函数[亦即：$\lambda_\alpha(e, \omega)(0)=e$ 且 $p\lambda_\alpha(e, \omega)(t)=\omega(t)$]．在此集合中定义一偏序 $(\alpha, \lambda_\alpha)\leqslant(\beta, \lambda_\beta)$，若 $\alpha\subset\beta$ 且

$$\lambda_\alpha(e, \omega)=\lambda_\beta(e, \omega),$$

只要 $(e, \omega)\in\bar{B}_\alpha$ 及 $f_\alpha(\omega)=f_\beta(\omega)$ [从而若 $(e, \omega)\in\bar{B}_\alpha$ 和 $\lambda_\alpha(e, \omega)\neq\lambda_\beta(e, \omega)$，则 $\omega\in W_j$(对某 $j\in\beta-\alpha$)]．

为了证明每个全序子集 $\{\alpha_i, \lambda_{\alpha_i}\}$ 有上界，设 $\beta=\bigcup\alpha_i$．我们将定义 λ_β：$\bar{B}_\beta\to E^I$ 使 $(\alpha_i, \lambda_{\alpha_i})\leqslant(\beta, \lambda_\beta)$ (对所有的 i)．设 U 是 W_β

[*)] 这里的函数 f_W 应要求为连续的，否则无意义．从而 W 当然是开子集．——译注

的任意开子集，仅与有限多个 W_j 相交(对 $j\in\beta$)，记这些为 $W_{j_1},\cdots,W_{j_r}$.（W_β 可被这样的一些集合 U 盖住）．选择 i，使得 $j_1,\cdots,j_r$ 全都属于 α_i．则若 $\alpha_i\subset\alpha_k$，便有 $f_{\alpha_i}|U=f_{\alpha_k}|U$．因为 $(\alpha_i,\lambda_{\alpha_i})\leqslant(\alpha_k,\lambda_{\alpha_k})$，故 $\lambda_{\alpha_i}(e,\omega)=\lambda_{\alpha_k}(e,\omega)$（对 $(e,\omega)\in\bar{B}_{\alpha_i}$），其中 $\omega\in U$．所以存在映射 $\lambda_\beta:\bar{B}_\beta\to E^I$ 使 $\lambda_\beta(e,\omega)=\lambda_{\alpha_i}(e,\omega)$（对充分大的 α_i）．我们现在来证明 $(\alpha_i,\lambda_{\alpha_i})\leqslant(\beta,\lambda_\beta)$．若 $(e,\omega)\in\bar{B}_{\alpha_i}$ 及 $\lambda_{\alpha_i}(e,\omega)\neq\lambda_\beta(e,\omega)$，则存在 α_k 使 $(\alpha_i,\lambda_{\alpha_i})\leqslant(\alpha_k,\lambda_{\alpha_k})$ 且 $\lambda_{\alpha_i}(e,\omega)\neq\lambda_{\alpha_k}(e,\omega)$．这蕴涵 $\omega\in W_j$ 对某个 $j\in\alpha_k-\alpha_i$．所以 $\omega\in W_j$（对某 $j\in\beta-\alpha_i$）．从而 $(\alpha_i,\lambda_{\alpha_i})\leqslant(\beta,\lambda_\beta)$．

由 Zorn 引理，有一极大元素 (α,λ_α)．于是我们只需证明 $\alpha=J$ 即可完成证明．若 $\alpha\neq J$，设 $j_0\in J-\alpha$，且设 $\beta=\alpha\cup\{j_0\}$．定义 $g:W_\beta\to\boldsymbol{R}$ 使 $g(\omega)=f_\alpha(\omega)/f_\beta(\omega)$．则 $0\leqslant g(\omega)\leqslant1$，$g(\omega)\neq0\Leftrightarrow\omega\in W_\alpha$，且 $g(\omega)\neq1\Leftrightarrow\omega\in W_{j_0}$．定义 $\mu:\bar{B}_{j_0}\to E$ 使

$$\mu(e,\omega)=\begin{cases}e & \left(0\leqslant g(\omega)\leqslant\dfrac{1}{3}\right)\\ \lambda_\alpha(e,\omega)\left(2g(\omega)-\dfrac{2}{3}\right) & \left(\dfrac{1}{3}\leqslant g(\omega)\leqslant\dfrac{2}{3}\right)\\ \lambda_\alpha(e,\omega)(g(\omega)) & \left(\dfrac{2}{3}\leqslant g(\omega)\leqslant\ \right).\end{cases}$$

则 μ 是连续的．设 Λ 是 W_j 上的扩充升腾函数，且定义 $\lambda_\beta:\bar{B}_\beta\to E^I$ 使

$$\lambda_\beta(e,\omega)(t)$$

$$=\begin{cases}\Lambda(e,\omega,0)(t), & 0\leqslant g(\omega)\leqslant\dfrac{1}{3}\\ \left.\begin{array}{l}\lambda_\alpha(e,\omega)(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2g(\omega)\quad\dfrac{2}{3}\\ \Lambda\left(\mu(e,\omega),\omega,2g(\omega)-\dfrac{2}{3}\right)(t),\\ 2g(\omega)-\dfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant1\end{array}\right\} & \dfrac{1}{3}\leqslant g(\omega)\leqslant\dfrac{2}{3}\\ \left.\begin{array}{ll}\lambda_\alpha(e,\omega)(t), & 0\leqslant t\leqslant g(\omega)\\ \Lambda(\mu(e,\omega),\omega,g(\omega))(t), & g(\omega)\leqslant t\leqslant1\end{array}\right\} & \dfrac{2}{3}\leqslant g(\omega)\leqslant1.\end{cases}$$

则 λ_β 是 W_β 上定义好了的升腾函数. 进一步，对 $(e, \omega)\in \bar{B}_\alpha$ 若 $\lambda_\alpha(e, \omega)\neq\lambda_\beta(e, \omega)$，则 $g(\omega)\neq\bot$ 且 $\omega\in W_{j_0}$. 因 $j_0\in\beta-\alpha$，这意味着 $(\alpha, \lambda_\alpha)<(\beta, \lambda_\beta)$ 与 (α, λ_α) 的极大性相矛盾. ▌

在 p 有唯一道路升腾的情况下，对 B^I 的任意开覆盖 $\{W_j\}$，只要对每个 j 在 W_j 上都有升腾函数，则引理 10 仍然有效（因为所升腾的道路的唯一性保证了扩充升腾可并于对 p 的升腾）. 这用于证明覆叠映射是纤维化的定理（定理 2.2.3）中，它无须对底空间给以任何假定而有效.

11. 引理 给定一映射 $p: E\to B$ 和 B 的子集 $U_1, \cdots, U_k$，使在 $U_1^I, U_2^I, \cdots, U_k^I$ 上有扩充升腾函数. 设 W 是 B^I 的子集，使

$$W=\left\{\omega\in B^I \,\middle|\, \omega\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right)\subset U_i, \text{ 对 } i=1, \cdots, k\right\}.$$

则 W 上有扩充升腾函数.

证明 设 Λ_i 是 U_i^I 上的扩充升腾函数(对 $i=1, \cdots, k$). 给定一道路 $\omega\in W$，设 ω_i 是道路，在 $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$ 上等于 ω，及在 $\left[0, \frac{i-1}{k}\right]$ 和 $\left[\frac{i}{k}, 1\right]$ 上取常值. 给定 $(e, \omega, s)\in\tilde{W}$，使

$$(n-1)/k\leqslant s\leqslant \frac{n}{k}.$$

对 $i=0, \cdots, k$ 归纳地定义 $e_i\in E$，使

$$e_{n-1}=\Lambda_n(e, \omega_n, s)\left(\frac{n-1}{k}\right)$$

$$e_n=\Lambda_n(e, \omega_n, s)\left(\frac{n}{k}\right)$$

且
$$e_{i-1}=\Lambda_i\left(e_i, \omega_i, \frac{i}{k}\right)\left(\frac{i-1}{k}\right)\quad(0<i<n-1)$$

$$e_{i+1}=\Lambda_{i+1}\left(e_i, \omega_{i+1}, \frac{i}{k}\right)\left(\frac{i+1}{k}\right)\quad(n<i+1\leqslant k).$$

W 上的一个扩充升腾函数定义为

$A(e, \omega, s)(t)$

$$=\begin{cases} A_i\left(e_i, \omega_i, \frac{i}{k}\right)(t) & \left(\frac{i-1}{k}\leqslant t\leqslant\frac{i}{k}\leqslant\frac{n-1}{k}\right) \\ A_n(e, \omega_n, s)(t) & \left(\frac{n-1}{k}\leqslant t\leqslant\frac{n}{k}\right). \\ A_{i+1}\left(e_i, \omega_{i+1}, \frac{i}{k}\right)(t) & \left(\frac{n}{k}\leqslant\frac{i}{k}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{k}\right). \end{cases}$$ ▌

我们现已为从局部纤维化到纤维化的过渡的主要结果作好了准备.

12. 定理 给定映射 $p: E\to B$ 和 B 的可数覆盖 $\mathscr{U}$, 使对 $U\in\mathscr{U}$, $p|p^{-1}(U): p^{-1}(U)\to U$ 是纤维化. 则 p 是纤维化.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_j\}$ 以及对 $k\geqslant 1$ 给定的指标集合 $j_1, \cdots, j_k$ 设 $W_{j_1j_2\cdots j_k}$ 是 B^I 的子集,使

$$W_{j_1j_2\cdots j_k}=\left\{\omega\in B^I \mid \omega\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right)\right.$$
$$\left.\subset U_{j_i}, i=1, \cdots, k\right\}.$$

则显然,族 $\{W_{j_1j_2\cdots j_k}\}$(变化 k)是 B^I 的开覆盖,且由引理 11,每个集合 $W_{j_1j_2\cdots j_k}$ 有扩充升腾函数. 对于确定的 k, 族 $\{W_{j_1j_2\cdots j_k}\}$ 是局部有限的. 事实上,若 $\omega\in B^I$, 则对每个 $i=1, \cdots, k$, 有 $\omega\left[\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right)$ 的邻域 V_i 仅与有限多个 U_j 相交. 则 $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}\left\langle\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right], V_i\right\rangle$ 是 ω 的邻域仅与有限多个 $\{W_{j_1j_2\cdots j_k}\}$ 相交.

对每 j, 设 $f_j: B\to I$ 是连续映射, 使 $f_j(b)\neq 0$ 当且仅当 $b\in U_j$. 定义 $\bar{f}_{j_1\cdots j_k}: B^I\to I$ 使

$$\bar{f}_{j_1\cdots j_k}(\omega)=\inf\left\{f_{j_i}\omega(t)\middle|\frac{i-1}{k}\leqslant t\leqslant\frac{i}{k},\right.$$
$$\left.i=1, \cdots, k\right\}.$$

则 $\bar{f}_{j_1\cdots j_k}(\omega)\neq 0$ 当且仅当 $\omega\in W_{j_1\cdots j_k}$.

可惜的是,族 $\{W_{j_1\cdots j_k}\}$(所有 k)已不再是局部有限的了,不然,引理 10 即可完成本证明了. 修改集合 $W_{j_1\cdots j_k}$ 能够解决此困难. 因

为对确定的 m，族 $\{W_{j_1\cdots j_k}\}$ 对 $k<m$ 是局部有限的，故函数 $\bar{f}_{j_1\cdots j_k}$ 对 $k<m$ 的和是 B^I 上的连续实值函数 g_m。定义

$$f'_{j_1\cdots j_m}=\inf(\sup(0,\ \bar{f}_{j_1\cdots j_m}-mg_m),\ 1).$$

则 $f'_{j_1\cdots j_m}$: $B^I\to I$ 且我们定义 $W'_{j_1\cdots j_m}=\{\omega\in B^I|f'_{j_1\cdots j_m}(\omega)\neq 0\}$. 显然，$W'_{j_1\cdots j_m}\subset W_{j_1\cdots j_m}$；所以在 $W'_{j_1\cdots j_m}$ 上有扩充升腾函数. 由引理 10，为完成此证明仅须核实 $\{W'_{j_1\cdots j_k}\}$（以 k 为变元）是 B^I 的局部有限的覆盖.

对于 $\omega\in B^I$，设 m 是对某些 $j_1,\ \cdots,\ j_m$ 使 $\bar{f}_{j_1\cdots j_m}(\omega)\neq 0$ 的最小整数. 则 $g_m(\omega)=0$，且 $f'_{j_1\cdots j_m}(\omega)=\bar{f}_{j_1\cdots j_m}(\omega)\neq 0$. 所以 $\omega\in W'_{j_1\cdots j_m}$，这证明了 $\{W'_{j_1\cdots j_k}\}$ 是 B^I 的覆盖. 为了说明其局部有限，设 N 被选取得使 $N>m$ 且 $\bar{f}_{j_1\cdots j_m}(\omega)>\frac{1}{N}$. 则 $g_N(\omega)>\frac{1}{N}$，且 $Ng_N(\omega)>1$. 从而 $Ng_N(\omega')>1$（对所有在 ω 的某邻域 V 中的 ω'）. 所以对于 $k\geqslant N$ 所有函数 $f'_{j_1\cdots j_k}$ 在 V 上退化. 但这意味着对应的集合 $W'_{j_1\cdots j_k}$ 与 V 分离. 因为族 $\{W'_{j_1\cdots j_k}\}$ 对 $k<N$ 是局部有限的，所以族 $\{W'_{j_1\cdots j_k}\}$（所有 k）是局部有限的. ▌

拟紧致 Hausdorff 空间的任意开覆盖有可数加细，此事实导致下一个定理：

13. 定理 *若 B 是拟紧致 Hausdorff 空间，则映射 p: $E\to B$ 是纤维化，当且仅当它是局部纤维化.* ▌

从投射是局部纤维化. 所以我们有下述推论：

14. 推论 *若 $(E,\ B,\ F,\ p)$ 是纤维丛，底空间 B 是拟紧致 Hausdorff 空间，则 p 是纤维化.* ▌

§8 纤 维 化

本节包括关于纤维化的一般讨论. 我们确立上纤维化和纤维化之间的关系，它容许从上纤维化利用函数空间来构造纤维化. 我们也证明在同伦意义下每个映射等价于一个纤维化映射（这对偶于一个涉及上纤维化的类似结果）. 本节包括纤维化型和诱导纤维

化的概念的定义，以及同伦的映射诱导纤维同伦等价的纤维化这结论的证明.

我们从有关上纤维化的定理 2.7.8 的类似结果着手. 给定映射 $f\colon X'\to X$，设 $\overline{X}$ 是和集 $(X'\times I)\vee(X\times 0)$ 的商空间，其商映射是把 $(x',0)\in X'\times I$ 与 $(f(x'),0)\in X\times 0$ 相叠合得到的. 以 $[x',t]$ 及 $[x,0]$ 分别记 $\overline{X}$ 的对应于 $(x',t)\in X'\times I$ 及 $(x,0)\in X\times 0$ 的点. 则 $[x',0]=[f'(x),0]$. 存在映射

$$\bar{i}\colon \overline{X}\to X\times I$$

由

$$\bar{i}[x',t]=(f(x'),t)\quad (x'\in X',\ t\in I)$$

$$\bar{i}[x,0]=(x,0)\qquad (t\in X)$$

所定义. 对于 f 的一个收缩函数是个映射

$$\rho\colon X\times I\to\overline{X}$$

为 $\bar{i}$ 的左逆. 在 f 是包含映射的情况下，$\bar{i}$ 也是包含映射，且对于 f 的收缩函数是 $X\times I$ 到 f 空间 $X'\times I\cup X\times 0$ 的收缩.

1. 定理 映射 $f\colon X'\to X$ 是上纤维化，当且仅当存在对于 f 的收缩函数.

证明 若 f 是上纤维化，设 $g\colon X\to\overline{X}$ 和 $G\colon X'\times I\to\overline{X}$ 是映射，使 $g(x)=[x,0]$ 和 $G(x',t)=[x',t]$. 因为

$$G(x',0)=[x',0]=[f(x'),0]=gf'(x),$$

则由 f 是上纤维化推出：存在映射 $\rho\colon X\times I\to\overline{X}$，使 $\rho(x,0)=g(x)$ 及 $\rho(f(x'),t)=G(x',t)$. 于是，ρ 是对于 f 的收缩函数

反之，给出映射 $g\colon X\to Y$ 和 $G\colon X'\times I\to Y$，使 $G(x',0)=gf(x')$ (对于 $x'\in X'$)，定义

$$\overline{G}\colon \overline{X}\to Y$$

使 $\overline{G}[x',t]=G(x',t)$ 和 $\overline{G}[x,0]=g(x)$. 若 $\rho\colon X\times I\to\overline{X}$ 是对于 f 的收缩函数，则映射 $F=\overline{G}\circ\rho\colon X\times I\to Y$ 有性质 $F(x,0)=g(x)$ 和 $F(f(x'),t)=G(x',t)$. 这证明了 f 是上纤维化. ∎

这导致下述的由上纤维化来构造出纤维化.

2. 定理 设 $f\colon X'\to X$ 是上纤维化，其中 X' 和 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，且设 Y 是任一空间. 则映射 $p\colon Y^X\to Y^{X'}$ 由

$p(g)=g\circ f$ 所定义的，是个纤维化.

证明 设 $\rho: X\times I\to\overline{X}$ 是对于 f 的收缩函数(由定理1，这是存在的). 则 ρ 定义了一映射

$$\rho': Y^{\overline{X}}\to Y^{X\times I}$$

使 $\rho'(g)=g\circ\rho$ (对 $g: \overline{X}\to Y$). 因为 X' 和 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，故 $\overline{X}$ 也是，且由引言的定理 2.9，$Y^{X\times I}\approx(Y^X)^I$，以及

$$Y^{\overline{X}}\approx\{(g, G)\in Y^X\times(Y^{X'})^I\ g\circ f=G(0)\}.$$

所以 ρ' 对应于对于 $p: Y^X\to Y^{X'}$ 的一升腾函数，且由定理 2.7.8，p 是个纤维化. ∎

3. 推论 对任一空间 Y，设 $p: Y^I\to Y\times Y$，由映射

$$p(\omega)=(\omega(0), \omega(1))$$

定义，其中 $\omega: I\to Y$. 则 p 是纤维化.

证明 因为 $\dot{I}\times I\cup I\times 0$ 是 $I\times I$ 的收缩核，故包含映射 $\dot{I}\subset I$ 是上纤维化[与此等价地，偶$(I, \dot{I})$关于任何空间有同伦扩充性质]. 则结论由定理 2 及注意到以下的事实而推得：对 $g: \dot{I}\to Y$，映射 $g\to(g(0), g(1))$ 将 $Y^{\dot{I}}$ 同胚映到 $Y\times Y$. ∎

设 $f: B'\to B$ 和 $p: E\to B$ 是映射，且设 E' 是 $B'\times E$ 的子集，由

$$E'=\{(b', e)\in B'\times E\,|\,f(b')=p(e)\}$$

定义，E' 称为 B' 和 E 的纤维积(更确切地说，是 f 和 p 的纤维积，见§2.2). 注意有映射 $p': E'\to B'$ 和 $f': E'\to E$，由 $p'(b', e)=b'$ 和 $f'(b', e)=e$ 定义. E' 和映射 p' 与 f' 可示性为 $f: B'\to B$ 和 $p: E\to B$ 在一范畴中的积；这范畴的对象为以 B 为值域的连续映射，且它的态为交换三角形

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ & {\scriptstyle g_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g_2} & \\ & B & \end{array}$$

下列的性质是容易验证的.

4. 若 p 是单映(或满映)，则 p' 也是. ∎

5. 若 $p: B\times F\to B$ 是平凡的纤维化，则 $p': E'\to B'$ 等价于平凡的纤维化 $B'\times F\to B'$. ▌

6. 若 p 是纤维化(或有唯一道路升腾的纤维化)，则 p' 也是. ▌

7. 若 p 是纤维化，则 f 可升腾于 E，当且仅当 p' 有一截面. ▌

注意，因为纤维积对于 B 和 E 是对称的(或确切些说，对于 f 和 p 是对称的)，在以 f 和 f' 代替 p 和 p' 时，则有一系列类似的命题.

若 $p: E\to B$ 是纤维化(或覆叠投射)，且 $f: B'\to B$ 是一映射，则由性质6(或性质5)，$p': E'\to B'$ 是纤维化(或覆叠投射)，称为从 p 被 f 诱导的纤维化(或覆叠投射). 若 $\xi=(E, B, F, p)$ 是纤维丛及 $f: B'\to B$ 是一映射，则从性质5知，存在纤维丛 (E', B', F, p'). 这个纤维丛称为从 ξ 被 f 诱导的纤维丛，并记以 $f^*\xi$. 在包含映射 $i: B'\subset B$ 的情况下，用 $E|B'$ 记 B' 和 E 的纤维积，且若 ξ 是以 B 为底空间的纤维丛，则 $\xi|B'$ 表示底空间为 B' 由 i 诱导的纤维丛. 注意到 $\xi|B'$ 等价于 $(p^{-1}(B'), B', F, p|p^{-1}(B'))$.

8. 推论 对于任一空间 Y 及点 $y_0\in Y$，设 $p: P(Y, y_0)\to Y$ 是映射，把始于 y_0 的每个道路映到其终点. 则 p 是纤维化，其在 y_0 上的纤维为回路空间 ΩY.

证明 设 $f: Y\to Y\times Y$ 由 $f(y)=(y_0, y)$ 定义，且设 $\bar{p}: Y^I\to Y\times Y$ 是推论3中的纤维化. 则由 f 诱导的纤维化等价于映射 $p: P(Y, y_0)\to Y$，其中 $p(\omega)=\omega(1)$，且 $p^{-1}(y_0)$ 是 y_0 上的纤维，依定义，即为回路空间 ΩY. ▌

由推论3得出，映射 $p': Y^I\to Y$ 是由 $p'(\omega)=\omega(0)$[或由 $p'(\omega)=\omega(1)$]给出的，是纤维化，因为它是纤维化 $Y^I\to Y\times Y\to Y$ 的合成. 若 $p: E\to B$ 是任一映射，且 $p': B^I\to B$ 是纤维化，由 $p'(\omega)=\omega(0)$ 定义，则 E 和 B^I 的纤维积恰是在定义 p 的升腾函数的概念时，用到的空间 $\bar{B}$.

这些关于纤维积和诱导纤维化的考察，有关于上纤维化的类似的内容. 给定映射 $f_1: X\to X_1$ 和 $f_2: X\to X_2$，X_1 和 X_2 的上

纤维和是 $X_1 \vee X_2$ 的商空间，由叠合 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 对所有 $x \in X$ 来得出．这商空间记作 X'．于是存在映射 $i_1: X_1 \to X'$ 和 $i_2: X_2 \to X'$，这些示性 X' 作为 f_1 与 f_2 在一范畴中的和，这范畴以定义域为 X 的映射为对象，以交换三角形为态．若 $f: X \to X_1$ 为上纤维化，则 $i_2: X_2 \to X'$ 也是上纤维化．这称为从 f_1 由 f_2 诱导的上纤维化．

对任意空间 X'，由 $h_0(x') = (x', 0)$ 定义的映射 $h_0: X' \to X' \times I$ 是上纤维化，且若 $f: X' \to X$ 是任一映射，则 $X' \times I$ 和 X 的上纤维和恰是用于定义有关 f 的收缩函数概念时的那个空间 $\overline{X}$．

设 $p: E \to B$ 是纤维化．映射 f_0 $f_1: X \to E$ 称作是纤维同伦的，记作 $f_0 \underset{p}{\sim} f_1$，若有同伦 $F: f_0 \simeq f_1$，使 $pF(x, t) = pf_0(x)$（对 $x \in X$ 和 $t \in I$）（在此情况下，$p \circ f_0 = p \circ f_1$）．在映射 $X \to E$ 的集合中这是个等价关系．其等价类记 $[X; E]_p$，且若 $f: X \to E$，则以 $[f]_p$ 记其纤维同伦类．纤维同伦的概念对偶于相对同伦的概念．

我们应用诱导纤维来证明，任一映射在同伦等价的意义下是个纤维化．设 $f: X \to Y$，且设 $p': Y^I \to Y$ 是由 $p'(\omega) = \omega(0)$ 定义的纤维化．设 $p: P_f \to X$ 是从 p' 由 f 诱导的纤维化，称为 f 的映射道路纤维化，它是对偶于映射柱的．于是存在 p 的截面 $s: X \to P_f$，由 $s(x) = (x, \omega_{f(x)})$ 定义，其中 $\omega_{f(x)}$ 是 Y 中在 $f(x)$ 的常值道路．也存在映射 $p'': P_f \to Y$，由 $p''(x, \omega) = \omega(1)$ 定义．于是我们有对偶于定理 1.4.12 的下述定理：

9．定理 给定映射 $f: X \to Y$，则存在交换三角形

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & P_f \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p''} & \\ & Y & \end{array}$$

使得

(a) $1_{P_f} \underset{p}{\simeq} s \circ p$；

(b) p'' 是个纤维化．

证明 从三角形中各映射的定义可直接看出其交换性．

(a) 定义 $F: P_f\times I\to P_f$ 使 $F((x, \omega), t)=(x, \omega_{1-t})$, 其中 $\omega_{1-t}(t')=\omega((1-t)t')$. 则 F 是从 1_{P_f} 到 $s\circ p$ 的纤维同伦.

(b) 设 $g: W\to P_f$ 和 $G: W\times I\to Y$ 是映射, 使 $G(w, 0)=p''g(w)$ (对 $w\in W$). 则存在映射 $g': W\to X$ 和 $g'': W\to Y^I$, 使 $g''(w)(0)=fg'(w)$ 及 $g(w)=(g'(w), g''(w))$ (对 $w\in W$). 我们定义 G 的升腾 $G': W\times I\to P_f$ 从 g 开始使

$$G'(w, t)=(g'(w), \bar{g}(w, t)),$$

其中 $\bar{g}(w, t)\in Y^I$, 由

$$\bar{g}(w, t)(t')=\begin{cases} g''(w)(2t'/(2-t)), \\ (0\leqslant 2t'\leqslant 2-t\leqslant 2, w\in W); \\ G(w, 2t'+t-2), \\ (1\leqslant 2-t\leqslant 2t'\leqslant 2, w\in W). \end{cases}$$

所定义. 因为 p'' 有同伦升腾性质, 故它是个纤维化. ▮

从此得出, 纤维化 $p'': P_f\to Y$ 在取 Y 为值域的映射的同伦范畴中等价于原来的映射 $f: X\to Y$ (借助 $s: X\to P_f$ 和 $p: P_f\to X$). 在以等价的纤维化代替 f 的同时, 我们以具有相同伦型的空间 P_f 代替 X; 而在 §1.4 中, 当以等价的上纤维化代替 f 时, 以具有相同伦型的空间 Z_f 代替空间 Y.

两纤维化 $p_1: E_1\to B$ 和 $p_2: E_2\to B$ 称为*纤维同伦等价的*(或称*为有相同纤维伦型的*), 若存在映射 $f: E_1\to E_2$ 和 $g: E_2\to E_1$, 使 $g\circ f\underset{p_1}{\simeq}1_{E_1}$ 和 $f\circ g\underset{p_2}{\simeq}1_{E_2}$ (在此意义下, f 和 g 保持纤维, 即 $p_2\circ f=p_1$ 及 $p_1\circ g=p_2$). 映射 f 和 g 都称为*纤维同伦等价*. 本节余下部分是涉及纤维同伦等价的.

我们从同伦映射的升腾的下述结果开始.

10. 定理 *设 $p: E\to B$ 是纤维化, 且设 $F_0, F_1: X\times I\to E$ 是映射. 给定同伦 $H: p\circ F_0\simeq p\circ F_1$ 和 $G: F_0|X\times 0\simeq F_1|X\times 0$, 使 $H(x, 0, t)=pG(x, 0, t)$. 则存在 H 的升腾 $H': X\times I\times I\to E$, 它是从 F_0 到 F_1 的同伦, 且是 G 的扩充.*

证明 设 $A=(I\times 0)\cup(0\times I)\cup(I\times 1)\subset I\times I$, 且定义

$f: X\times A\to E$ 使

$$f(x, t, 0)=F_0(x, t),$$
$$f(x, 0, t)=G(x, 0, t),$$
$$f(x, t, 1)=F_1(x, t),$$

则 $H|X\times A=p\circ f$. 因为存在 $I\times I$ 到自身的把 A 变到 $I\times 0$ 的同胚，故存在 $X\times I\times I$ 到自身把 $X\times A$ 变到 $X\times I\times 0$ 的同胚. 从 p 的同伦升腾性质得出存在 H 的升腾 $H': X\times I\times I\to E$, 使 $H'|X\times A=f$. ▌

取 H 和 G 为驻定同伦[*]，我们得到以下推论：

11. 推论 设 $p: E\to B$ 是纤维化，且设 $F_0, F_1: X\times I\to E$ 是同一映射的升腾，使 $F_0|X\times 0=F_1|X\times 0$. 则 $F_0\underset{p}{\simeq}F_1\text{rel}X\times 0$. ▌

设 $p: E\to B$ 是纤维化，且设 $\omega: I\to B$ 是其底空间中的道路. 由 p 的同伦升腾性质，存在映射 $F: p^{-1}(\omega(0))\times I\to E$, 使 $pF(x, t)=\omega(t)$ 和 $F(x, 0)=x$[对于 $x\in p^{-1}(\omega(0))$ 和 $t\in I$]. 设

$$f: p^{-1}(\omega(0))\to p^{-1}(\omega(1))$$

是映射 $f(x)=F(x, 1)$. 根据定理 10, 如果 $\omega\simeq\omega'$ 是 B 中同伦的道路，且如果 $F, F': p^{-1}(\omega(0))\times I\to E$, 使 $pF(x, t)=\omega(t)$, $pF'(x, t)=\omega'(t)$, 且 $F(x, 0)=x=F'(x, 0)$[对于 $x\in p^{-1}(\omega(0))$ 和 $t\in I$], 则由 $f(x)=F(x, 1)$ 和 $f'(x)=F'(x, 1)$ 定义的映射 $f, f': p^{-1}(\omega(0))\to p^{-1}(\omega(1))$ 是互相同伦的. 从而有一完全确定的同伦类 $[f]\in[p^{-1}(\omega(0)); p^{-1}(\omega(1))]$ 对应于 B 中的道路类 $[\omega]$. 我们置 $h[\omega]=[f]$.

下述定理是定理 2.3.7 对任意纤维化所取的形式.

12. 定理 *设 $p: E\to B$ 是纤维化. 则存在从 B 的基本广群到同伦范畴的反变函子，变 $b\in B$ 为 b 上的纤维，变道路类 $[\omega]$ 为同伦类 $h[\omega]$.*

证明 若 ω_b 是在 b 的常值道路，设 $F: p^{-1}(b)\times I\to E$ 是映射

---

[*] 即一映射到自身的同伦 $H: f\simeq f: X\to Y$, 由 $H(x, t)=f(x)$, $x\in X$, $t\in I$ 给出. ——译注

$F(x, t)=x$. 则相应的由 $f(x)=F(x, 1)$ 定义的映射 $f: p^{-1}(b)\to p^{-1}(b)$ 是恒同映射. 从而

$$h[\omega_b]=[1_{p^{-1}(b)}],$$

证明 h 是保单位的.

设 ω 和 ω' 是 B 中的道路, 使 $\omega(1)=\omega'(0)$. 给定映射 $F: p^{-1}(\omega(0))\times I\to E$, 使 $F(x, 0)=x$ 及 $pF(x, t)=\omega(t)$ [对于 $x\in p^{-1}(\omega(0))$ 和 $t\in I$], 又给定 $F': p^{-1}(\omega(1))\times I\to E$ 使 $F'(x', 0)=x'$ 及 $pF'(x', t)=\omega'(t)$ (对于 $x'\in p^{-1}(\omega'(0))$ 和 $t\in I$). 设 $f: p^{-1}(\omega(0))\to p^{-1}(\omega'(0))$ 由 $f(x)=F(x, 1)$ 定义, 并设

$$F'': p^{-1}(\omega(0))\times I\to E$$

由

$$F''(x, t)=\begin{cases} F(x, 2t) & \left(0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\ x\in p^{-1}(\omega(0))\right) \\ F'(f(x), 2t-1) & \left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\ x\in p^{-1}(\omega(0))\right) \end{cases}$$

给出. 则 $pF''(x, t)=(\omega*\omega')(t)$ 且 $F''(x, 0)=x$[对 $x\in p^{-1}(\omega(0))$ 和 $t\in I$]. 设 $f': p^{-1}(\omega'(0))\to p^{-1}(\omega'(1))$ 由 $f'(x')=F'(x', 1)$ 给出. 则 $F''(x, 1)=f'(f(x))$ (对于 $x\in p^{-1}(\omega(0))$). 这证明了

$$h[\omega*\omega']=h[\omega']*h[\omega].$$

所以 h 是个反变函子. ▌

这确立了对任意纤维化与推论 2.3.8 相类似的下述结果:

13. 推论 *若 $p: E\to B$ 是纤维化, 底空间是道路连通的. 则其任意两个纤维有相同的伦型.* ▌

下述结果指出, 同伦的映射诱导出的纤维化是纤维同伦等价的.

14. 定理 *设 $p: E\to B$ 是纤维化, 且设 $f_0, f_1: X\to B$ 是同伦的. 则从 p 由 f_0 和由 f_1 分别诱导的纤维化是纤维同伦等价的.*

证明 设 $p_0: E_0\to X$ 和 $p_1: E_1\to X$ 分别是从 p 由 f_0 和 f_1 诱导的纤维化, 且设 $f_0': E_0\to E$ 和 $f_1': E_1\to E$ 是相应的映射, 使 $p\circ f_0'=f_0\circ p_0$ 和 $p\circ f_1'=f_1\circ p_1$. 给定从 f_0 到 f_1 的一个同伦 $F: X\times I\to B$, 存在映射 $F_0': E_0\times I\to E$ 和 $F_1': E_1\times I\to E$, 使得

$p\circ F'_0=F\circ(p_0\times 1_I)$, $p\circ F'_1=F\circ(p_1\times 1_I)$, 且 $F'_0|E_0\times 0=f'_0$ 和 $F'_1|E_1\times 1=f'_1$. 设 g_0: $E_0\to E_1$ 和 g_1: $E_1\to E_0$ 是由性质 $F'_0(x, 1)=f'_1g_0(x)$ (对于 $x\in E_0$) 及 $F'_1(y, 0)=f'_0g_1(y)$ (对 $y\in E_1$) 所确定的映射. 则

$$p\circ F'_0\circ(g_1\times 1_I)=F\circ(p_0\times 1_I)\circ(g_1\times 1_I)$$
$$=F\circ(p_1\times 1_I),$$
$$F'_0\circ(g_1\times 1_I)|E_I\times 0=F'_1|E_1\times 0.$$

于是从定理 10 推出 $F'_1\underset{p}{\simeq}F'_0\circ(g_1\times 1_I)$. 以类似的方法得出 $F'_0\underset{p}{\simeq}F'_1\circ(g_0\times 1_I)$. 这蕴涵 $g_0g_1\underset{p}{\simeq}1_{E_1}$ 及 $g_1g_0\underset{p}{\simeq}1_{E_0}$. ■

显然,常值映射诱导平凡的纤维化,且有以下结果:

15. 推论 若 p: $E\to B$ 是纤维化, 且 B 可缩, 则 p 纤维同伦等价于平凡纤维化 $B\times p^{-1}(b_0)\to B$ (对于任意 $b_0\in B$). ■

设 B 是空间, 它是某空间 Y 与 S^0 的联接. 则 $B=C_-Y\cup C_+Y$, 其中 C_-Y 和 C_+Y 是 Y 上的锥形, 且 $C_-Y\cap C_+Y=Y$. 设 $y_0\in Y$, 且设 p: $E\to B$ 是纤维化, 其纤维 $F_0=p^{-1}(b_0)$. 从推论 15 得出, 存在纤维同伦等价 f_-: $C_-Y\times F_0\to p^{-1}(C_-Y)$ 和 g_+: $p^{-1}(C_+Y)\to C_+Y\times F_0$. 对 p 的一个控制函数 μ: $Y\times F_0\to F_0$ 是个函数 μ, 由等式

$$g_+f_-(y, z)=(y, \mu(y, z)), \quad (y\in Y, z\in F_0)$$

所定义, 其中 f_-: $C_-Y\times F_0\to p^{-1}(C_-Y)$ 和 g_+: $p^{-1}(C_+Y)\to C_+Y\times F_0$ 是纤维同伦等价. 若 C_-Y 和 C_+Y 是相对于 y_0 可缩到 y_0 的, 则由定理 10 得出, 可选取 f_- 和 g_+ 使得 $z\mapsto f_-(y_0, z)$ 同伦于映射 $F_0\subset p^{-1}(C_-Y)$, 且 $z\mapsto g_+(z)$ 同伦于 F_0 到 $C_+Y\times F_0$ 的映射 $z\mapsto(y_0, z)$. 在此情况下, 对应于 f_- 和 g_+ 的控制函数 μ 有性质: 映射 $z\mapsto\mu(y_0, z)$ 同伦于恒同映射 $F_0\subset F_0$.

设 E_φ 是 S^n 上的纤维丛, 由示性映射 φ: $S^{n-1}\to G$ 所定义, 如例 2.7.5 中给出的 (其中 G 是纤维 F 的同胚群). 则 $E^n_-=C_-S^{n-1}$ 和 $E^n_+=C_+S^{n-1}$, 且易核实 f_- 和 g_+ 可如是选取使得相应的控制函数 μ: $S^{n-1}\times F\to F$ 是映射 $\mu(x, z)=\varphi(x)z$.

第2章习题

A 局部连通性

1. 证明空间 X 局部道路连通，当且仅当对于 x 在 X 中的任一邻域 U，存在 x 的邻域 V 使在 V 中任意点偶可被 U 中的道路连接.
2. 若 X 是空间，记 $\tilde{X}$ 为集合 X 中由 X 的开集的道路分支生成的拓扑所重新给出的拓扑空间. 证明 $\tilde{X}$ 是局部道路连通的，且 X 的恒同映射是连续函数 $j: \tilde{X}\to X$，有性质：对任意局部道路连通空间 Y，函数 $f: Y\to \tilde{X}$ 连续，当且仅当 $j\circ f: Y\to X$ 是连续的.
3. 对任意空间 X，设 $\tilde{X}$ 和 $j: \tilde{X}\to X$ 如习题 2 中所给. 证明 $j_{\#}: \pi(\tilde{X}, x_0)\approx\pi(X, x_0)$.

B 覆叠空间

1. 设 X 是两个闭单连通且局部道路连通子集 A 和 B 的并，使 $A\cap B$ 由一点组成. 证明若 $p: \tilde{X}\to X$ 是有唯一道路升腾的非空道路连通的纤维化，则 p 是同胚.
2. 设 $\tilde{X}=\{(x, y)\in R^2 | x$ 或 y 是整数$\}$，且设
$$X=S^1\vee S^1=\{(z_1, z_2)\in S^1\times S^1 | z_1=1 \text{ 或 } z_2=1\}.$$
证明映射 $p: \tilde{X}\to X$ 使 $p(x, y)=(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$ 是覆叠投射.
3. 设 $p: \tilde{X}\to X$ 如上题所述，设 $Y\subset\tilde{X}$ 为
$$Y=\{(x, y)\in \tilde{X} | 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}.$$
证明 Y 是 $\tilde{X}$ 的收缩核，且 $(p|Y)_{\#}$ 映 $\pi(Y)$ 的生成元到 $\pi(X)$ 中与 X 的两圈相对应两元素的交换子.
4. 证明 $\pi(S^1\vee S^1)$ 是非交换的.

C 覆叠空间 $ex: R\to S^1$

1. 对任一空间 X 证明映射 $f: X\to S^1$ 可升腾到映射 $\tilde{f}: X\to R$，使 $f=ex\circ\tilde{f}$，当且仅当 f 是零伦的.
2. 设 X 是连通局部道路连通空间，有基点 $x_0\in X$. 证明若一映射
$$[X, x_0; S^1, 1]\to \mathrm{Hom}(\pi(X, x_0), \pi(S^1, 1))$$
变 $[f]$ 为同态
$$f_{\#}: \pi(X, x_0)\to\pi(S^1, 1),$$

则它是单同态(该同伦类的集合是群，由 S^1 上的群构造给出它的群构造).

3. 证明从一单连通局部道路连通空间到 S^1 的任意两个映射是同伦的.

4. 证明对 $n\geqslant 2$，实射影空间 P^n 到 S^1 的任一映射是零伦的.

5. 证明没有映射 $f: S^n\to S^1$ (对 $n\geqslant 2$) 使 $f(-x)=-f(x)$.

6. **Borsuk-Ulam 定理** 证明若 $f: S^2\to R^2$ 是映射使 $f(-x)=-f(x)$ 则存在点 $x_0\in S^2$ 使 $f(x_0)=0$.

D 拓扑群的覆叠空间

1. 设 H 是拓扑群 G 的子群，且设 G/H 是其右陪集的齐性空间. 证明投射 $G\to G/H$ 是覆叠投射，当且仅当 H 是离散的.

2. 证明拓扑群的连通局部道路连通覆叠空间可给以群的构造使之成为拓扑群，投射为同态.

　　从一拓扑群 G 到另一个 G' 的局部同态是从 G 中 e 的某邻域 U 到 G' 的连续映射，使得若 $g_1, g_2, g_1g_2\in U$，则 $\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$. 从 G 到 G' 的一局部同构是从 e 的某邻域 U 到 e' 的某邻域 U' 的同胚 φ 使 φ 和 φ^{-1} 是两个局部同态(在此情况下，G 和 G' 称为局部同构的).

3. 证明一连通拓扑群间的连续同态 $\varphi: G\to G'$ 是覆叠投射，当且仅当存在 e 在 G 中的邻域 U，使 $\varphi|U$ 是从 G 到 G' 的局部同构.

4. 设 φ 是从连通拓扑群 G 到由 G 中 e 的连通邻域 U 确定的拓扑群 G' 的局部同态. 设 $\tilde{G}$ 是 $G\times G'$ 中由 φ 的图像生成的子群(即由 $\{(g, g')\in G\times G'|g'=\varphi(g), g\in U\}$ 生成的子群). 给 $\tilde{G}$ 以拓扑，由取 $\varphi|N$ 的图像为 (e, e') 的邻域的基，其中 N 变化于 e 在 U 中的邻域内. 证明 $\tilde{G}$ 是连通拓扑群，投射 $p_1: \tilde{G}\to G$ 是覆叠投射，且投射 $p_2: \tilde{G}\to G'$ 是连续的.

5. 证明两连通局部道路连通拓扑群局部同构，当且仅当有一拓扑群，它是这两个拓扑群的覆叠空间.

6. 若 G 是单连通局部道路连通拓扑群，且 φ 是从 G 到拓扑群 G' 的局部同态. 证明存在连续同态 $\varphi': G\to G'$，在 G 中 e 的某邻域上与 φ 重合.

E 纤维化

1. 若 $p: E\to B$ 是纤维化，证明 $p(E)$ 是 B 的道路分支的并.

2. 若一纤维化有道路连通的底空间，且某个纤维是道路连通的，证明其总空间也是道路连通的.

3. 设 $p: E\to B$ 是纤维化，且设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间. 定义 $p': E^X\to B^X$，使 $p'(g)=p\circ g$(对于 $g: X\to E$). 证明 p' 是纤维化.

4. 设 $p: E\to B$ 是纤维化，且设 $b_0\in p(E)$，$F=p^{-1}(b_0)$. 设 X 是一空间，视

为锥形 OX 的子集. 证明映射

$$p_{*}: [CX, X; E, F] \to [CX, X; B, b_0]$$

是双映.

5 设 $p: E \to B$ 是纤维化, 且设 $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0)$, $F = p^{-1}(b_0)$. 若 B 是单连通的, 证明 $\pi(F, e_0) \to \pi(E, e_0)$ 是满同态.

6. 设 $p: E \to B$ 是纤维化, 且设 $e_0 \in E$ 和 $b_0 = p(e_0)$. 若 $p^{-1}(b_0)$ 是单连通的, 证明

$$p_{\#}: \pi(E, e_0) \approx \pi(B, b_0).$$

7 设 $p: E \to B$ 是纤维化, $b_0 \in p(E)$. 若 E 单连通, 证明在 $\pi(B, b_0)$ 和 $p^{-1}(b_0)$ 的道路分支集合之间存在一个双映.

第3章　多　面　体

在第2章中论述了用基本群函子对覆叠空间分类．本章考虑特殊空间的基本群的计算问题．现在来说明许多空间(多面体类)的基本群可以用生成元和关系来描述．

一个多面体是个拓扑空间，它容许有一个单纯复形的三角剖分．这样，我们从研究单纯复形范畴开始．每个单纯复形由顶点和单纯形的一个抽象系统组成(每个单纯形是顶点的有限集合)．与这种单纯复形相联系的是一个拓扑空间，它由凸胞腔按此抽象系统的规定拼合而建立起来．因为这个抽象系统决定了该空间的拓扑性质，所以单纯复形和多面体的研究常称为组合拓扑学．

一个紧致多面体容许按一个有限单纯复形进行三角剖分．这样，这些空间可以以有限的条款来有效描述，且对涉及的函子可计算性问题提供了一类有用的空间．

§3.1和§3.2介绍多面体的定义和初步拓扑性质．§3.3引入单纯复形的重分的概念，并且说明了一个紧致多面体容许任意细的三角剖分．此结果在§3.4中用于证明单纯逼近定理，它断言从紧致多面体到任意多面体的连续映射可由单纯映射所逼近．

在§3.5中单纯逼近技术用于证明从紧致多面体到任意多面体的连续映射的同伦类集合可以抽象地以多面体的三角剖分的语言来描述．在§3.6中这结果用于把多面体的基本群抽象地描述为其三角剖分的棱道群，这在§3.7中用于得到多面体的基本群的生成元和关系的体系．在§3.7中也说明了基本群函子提供了连通一维多面体的同伦范畴的确切表示．§3.8由关于基本群的结果的应用，多面的一些例子，以及任意曲面的基本群的描述所组成．

§1 单纯复形

本节包括单纯复形范畴的及由此范畴到拓扑空间范畴的协变函子的定义.

一单纯复形 K 由顶点集合$\{v\}$和$\{v\}$中一族称作单纯形的非空有限子集$\{s\}$所组成,使得:

(a) 任一恰包含一个顶点的集合是个单纯形.

(b) 一个单纯形的任一非空子集是个单纯形.

刚好包含$q+1$个顶点的单纯形 s 称为 q 维单纯形;我们也可说 s 的维数是 q, 记以 $\dim s=q$. 若 $s'\subset s$, 则 s' 称为 s 的面(若 $s'\neq s$, 称为真面), 若 s' 是 p 维单纯形,它称为 s 的 p 维面. 若 s' 是 q 维单纯形, 则 s' 是 s 的唯一的 q 维面; 称 s 的面 s' 为真面, 若 $\dim s'<q$. 显然, 任一单纯形仅有有限个面. 因为 s 的面的任意面也是 s 自己的面, 故 K 的单纯形由面的关系给出了偏序(若 s' 是 s 的面, 记 $s'\leqslant s$).

从条件(a)得出, K 的0维单纯形双映地对应于 K 的顶点. 从条件(b)得出, 任一单纯形由其0维面决定. 所以 K 可视为等于其单纯形的集合, 且把 K 的顶点等同于其相应的0维单纯形.

下面列举一些例子:

1. 单纯形的空集是单纯复形, 记作 $\emptyset$.

2. 对任一集合 A, A 的所有有限非空子集的集合是单纯复形.

3. 若 s 是单纯复形 K 的单纯形, 则 s 所有面的集合是单纯复形, 记作 $\bar{s}$.

4. 若 s 是单纯复形 K 的单纯形, 则 s 所有真面的集合是单纯复形, 记作 $\dot{s}$.

5. 若 K 是单纯复形, 其 q 维骨架 K^q 定义为这样的单纯复形, 它由 K 的所有 p 维单纯形组成(对所有 $p\leqslant q$).

6. 给定集合 X 及其一个子集族 $\mathscr{W}=\{W\}$. $\mathscr{W}$ 的神经记作

$K(\mathscr{W})$，是个单纯复形，其单纯形为 $\mathscr{W}$ 的有非空交的有限非空子集．这样，$K(\mathscr{W})$ 的顶点为 $\mathscr{W}$ 的非空元素．

7．若 K_1 和 K_2 是单纯复形，其联接 $K_1 * K_2$ 是个单纯复形，由

$$K_1 * K_2 = K_1 \vee K_2 \cup \{s_1 \vee s_2 \mid s_1 \in K_1,\ s_2 \in K_2\}$$

所定义．这样，$K_1 * K_2$ 的顶点集合即为 K_1 的顶点集合和 K_2 的顶点集合的集合和．

8．有一单纯复形，其顶点集合为 $\mathbf{Z}$，单纯形集合为

$$\{\{n\} \mid n \in \mathbf{Z}\} \cup \{\{n,\ n+1\} \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

9．对 $n \geqslant 1$，由坐标的大小给 $\mathbf{Z}^n$ 以偏序（亦即，任给 x，$x' \in \mathbf{Z}^n$，则 $x \leqslant x'$，若其坐标在 $\mathbf{Z}$ 中 $x_i \leqslant x_i'$）．存在一个单纯复形，其顶点集合是 $\mathbf{Z}^n$，且单纯形是 $\mathbf{Z}^n$ 中有限非空的全序子集 $\{x^0, \cdots, x^q\}$（亦即 $x^0 \leqslant x^1 \leqslant \cdots \leqslant x^q$）使对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $x_i^q - x_i^0 = 0$ 或 1．

若 K 是单纯复形，其维数记作 $\dim K$，定义如下：若 K 是空集则定义 $\dim K = -1$；若 K 包含 n 维单纯形，但无 $(n+1)$ 维单纯形，则定义 $\dim K = n$；若 K 包含 n 维单纯形（对所有的 $n \geqslant 0$），则定义 $\dim K = \infty$．这样，$\dim K = \sup\{\dim s \mid s \in K\}$．$K$ 称为有限的，若它仅包含有限个单纯形．若 K 是有限的，则 $\dim K < \infty$；然而，若 $\dim K < \infty$，则 K 不见得有限（例 8 即为维数为 1 的无限单纯复形）．

单纯映射 $\varphi: K_1 \to K_2$ 是从 K_1 的顶点到 K_2 的顶点的函数 φ，使对任意单纯形 $s \in K_1$，其象 $\varphi(s)$ 是 K_2 的单纯形．对任意的 K，存在恒同单纯映射 $1_K: K \to K$ 对应于顶点集的恒同映射．给定单纯映射 $K_1 \xrightarrow{\varphi} K_2 \xrightarrow{\psi} K_3$，合成单纯映射 $\psi \circ \varphi: K_1 \to K_3$ 对应顶点映射的合成，所以有单纯复形和单纯映射的范畴．

单纯复形 K 的子复形 L，记为 $L \subset K$，是 K 的子集（即 $s \in L \Rightarrow s \in K$），且要求是个单纯复形．显然 K 的子集 L 是子复形，当且仅当 K 中的任意单纯形若为 L 的单纯形的面也必须是 L 的单纯形．若 $L \subset K$，则有单纯包含映射 $i: L \subset K$．

子复形 $L\subset K$ 称为满的，若 K 的每个全部顶点都在 L 中的单纯形自身也属于 L. 于是有 K 的子复形 N 由全部下述的单纯形组成，即其顶点没有一个在 L 中. 显然，N 是 K 的与 L 分离的最大的子复形. 若 $s=\{v_0, v_1, \cdots, v_q\}$ 是 K 的任意单纯形，则或者 s 没有顶点在 L 中(此时 $s\in N$)，或者每个顶点都在 L 中(此时 $s\in L$ 若 L 是满的)，或者顶点可如是排列，使得 $v_i\in L$ 对 $i\leqslant p$ 及 $v_i\notin L$ 对 $i>p$，其中 $0\leqslant p<q$. 在此情况下，$s=s'\cup s''$，其中 $s'=\{v_0, \cdots, v_p\}$ 属于 L，若 L 是满的；$s''=\{v_{p+1}, \cdots v_q\}$ 在 N 中. 所以我们有以下结果.

10 引理 *若 L 是 K 的满子复形，且 N 是 K 的与 L 分离的最大子复形，则 K 的任意单纯形或在 N 中，或在 L 中，或有形式 $s'\cup s''$ 使 $s'\in L$ 及 $s''\in N$.* ▌

有个单纯偶(K, L)(即 K 是单纯复形，L 是子复形，允许是空的)及单纯映射 φ: $(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$(即 φ 是单纯映射 $K_1\to K_2$ 使 $\varphi(L_1)\subset L_2$)的范畴. 单纯复形的范畴是单纯偶的范畴的满子范畴. 也有点标单纯复形 K 和保基顶点单纯映射的范畴(亦即，K 是带有一个指定基顶点的单纯复形). 这是单纯偶范畴的满子范畴. 下列是一些例子.

11. 对于任意的 q，q 维骨架 K^q 是 K 的子复形. 且若 $p\leqslant q$，则 K^p 是 K^q 的子复形.

12. 对于任意的 $s\in K$，有子复形 $\dot{s}\subset \bar{s}\subset K$.

13. 若$\{L_j\}_{j\in J}$ 是 K 的子复形族，则 $\cap L_j$ 和 $\cup L_j$ 也是 K 的子复形.

14. 给定 $A\subset X$，$\mathscr{W}=\{W\}$是 X 的一个子集族，且 $K_A(\mathscr{W})$ 是 $\mathscr{W}$ 中所有这样的有限非空子集 W 作成的族，即 W 的交与 A 交于非空子集. 则 $K_A(\mathscr{W})$是神经 $K(\mathscr{W})$的子复形.

我们现在来定义从单纯复形和单纯映射的范畴到拓扑空间和连续映射的范畴的协变函子. 给定非空单纯复形 K，设$|K|$是从 K 的顶点集到 I 的所有满足下列条件的函数 α 的集合：

(a) 对于任意的 α，$\{v\in K|\alpha(v)\neq 0\}$ 是 K 的单纯形 (特别

地，$\alpha(v)\neq 0$ 仅对顶点的有限集合成立)。

(b) 对于任意的 α，

$$\sum_{v\in K}\alpha(v)=1.$$

若 $K=\emptyset$，则我们令 $|K|=\emptyset$。

实数 $\alpha(v)$ 称 α 的第 v 个重心坐标。存在 $|K|$ 上的度量 d，由

$$d(\alpha,\ \beta)=\sqrt{\sum_{v\in K}[\alpha(v)-\beta(v)]^2}$$

定义。且在 $|K|$ 上由此度量定义的拓扑称*度量拓扑*，具有度量拓扑的集合 $|K|$ 记为 $|K|_d$。

我们将在 $|K|$ 上定义另外一个拓扑。对 $s\in K$，*闭包单纯形* $|s|$ 由

$$|s|=\{\alpha\in|K|\ \alpha(v)\neq 0\Rightarrow v\in s\}$$

给出。

若 s 是 q 维单纯形，则 $|s|$ 一一对应于集合 $\{x\in\mathbf{R}^{q+1}|0\leqslant x_i\leqslant 1,\ \sum x_i=1\}$。进一步，$|K|_d$ 上的度量拓扑诱导出 $|s|$ 上的拓扑，将其作成同胚于上述 $\mathbf{R}^{q+1}$ 的紧致凸子集的拓扑空间 $|s|_d$。若

$$s_1,\ s_2\in K,$$

则显然 $s_1\cap s_2$ 或为空集(此时 $|s_1|\cap|s_2|=\emptyset$)，或为 s_1 的且是 s_2 的面(此时 $|s_1\cap s_2|=|s_1|\cap|s_2|$)。所以，在每种情况下，$|s_1|_d\cap|s_2|_d$ 是 $|s_1|_d$ 和 $|s_2|_d$ 中的闭子集，且在其交上由 $|s_1|_d$ 诱导的拓扑等于由 $|s_2|_d$ 诱导的拓扑。由引言的定理 2.5 得出 $|K|$ 上有一拓扑，上凝聚 $\{|s|_d|s\in K\}$。这拓扑称为*上凝聚拓扑*。K 的空间也记 $|K|$，是具有上凝聚拓扑的集合 $|K|$。(在文献中也称上凝聚拓扑为*弱拓扑*)。注意 $|\bar{s}|=|s|_d$；也用 $|s|$ 记空间 $|\bar{s}|$。

因为在上凝聚拓扑中子集 $A\subset|K|$ 是闭的(或开的)，当且仅当 $A\cap|s|$ 在 $|s|$ 中是闭的(或开的)(对每一个 $s\in K$)。我们有下述定理及其推论。

15. 定理 *函数 f: $|K|\to X$，其中 X 是拓扑空间在上凝聚拓扑中连续，当且仅当 $f|_{|s|}$: $|s|\to X$ 连续，对于每一个 $s\in K$。* ∎

16. 推论 *函数 f: $|K|\to X$ 在上凝聚拓扑中是连续的，当且*

仅当 $f||K^q|: |K^q|\to X$ 是连续的(对于每一个 $q\geqslant 0$). ∎

从定理 15 推出,集合 $|K|$ 的恒同映射是连续映射 $|K|\to|K|_d$. 注意, $L\subset K\Rightarrow|L|\subset|K|$, 且 $|L|_d$ 是 $|K|_d$ 的闭子集(这蕴涵 $|L|$ 是 $|K|$ 的闭子集). 进一步,若 $\{L_j\}_{j\in J}$ 是 K 的子复形族,则

$$\bigcup|L_j|=|\bigcup L_j|$$

且

$$\bigcap|L_j|=|\bigcap L_j|.$$

上凝聚拓扑有下述性质:

17. 定理 对于任意单纯复形 K, 其空间 $|K|$ 是正规的 Hausdorff 空间.

证明 因为 $|K|_d$ 是 Hausdorff 空间,且 $i: |K|\to|K|_d$ 是连续的,所以 $|K|$ 是 Hausdorff 空间. 为证明 $|K|$ 是正规的,只须说明若 A 是 $|K|$ 的闭子集,则任意连续映射 $f: A\to I$ 可被连续扩充至 $|K|$ 上即可. 由定理 15, f 的这样的扩充的存在性等价于一个带指标的连续映射族 $\{f_s: |s|\to I|s\in K\}$ 使

(a) 若 s' 是 s 的面,则 $f_s||s'|=f_{s'}$;

(b) $f_s|(A\cap|s|)=f|(A\cap|s|)$

的存在性.

族 $\{f_s\}$ 的存在性由对 $\dim s$ 来归纳证明. 若 s 是 0 维单形,则 $|s|$ 是单点,并且,或则 $|s|\in A$, 此时定义 $f_s=f||s|$; 或则 $|s|\overline{\in}A$, 此时随意定义 f_s.

设 $q>0$, 且设 f_s 对所有 $\dim s<q$ 的单纯形 s 已定义,满足条件(a)和(b). 给定一个 q 维单纯形 s, 定义 $f'_s: |\dot{s}|\cup(A\cap|s|)\to I$ 由下列条件确定:

$$f'_s||s'|=f_{s'},\quad s' \text{ 是 } s \text{ 的真面}^{*)}.$$

$$f'_s|(A\cap|s|)=f|(A\cap|s|).$$

因为 $\{f_{s'}\}_{\dim s'<q}$[**)] 满足条件(a)和(b), 故 f'_s 是从 $|s|$ 的闭子集

---

*) 原文为 $f'_s||s'|=f_{s'}$, s' 是 s 的面,似有误. ——译注

**) 原文为 $\{f_{s'}\}_{\dim s'\leq q}$, 似有误. ——译注

$|\dot{s}\cup(A\cap|s|)$到I的连续映射．由 Tietze 扩充定理，存在f_s'的连续扩充$f_s: |s|\to I$．▌

同样的技术可用于证明$|K|$是完全正规的(即$|K|$的每个闭子集是$|K|$上每个连续实值函数的 0 值集合)，且拟紧致．

对$s\in K$，定义开单纯形$\langle s\rangle\subset|K|$为

$$\langle s\rangle=\{\alpha\in|K|\,|\,\alpha(v)\neq 0\Leftrightarrow v\in s\}.$$

虽然闭单纯形是K中的闭集，但开单纯形不见得在$|K|$中是开的．然而，开单纯形$\langle s\rangle$却是$|s|$的开子集，因为$\langle s\rangle=|s|-|\dot{s}|$．每一点$\alpha\in|K|$属于唯一开单纯形(也就是开单纯形$\langle s\rangle$，其中$s=\{v\in K\,|\,\alpha(v)\neq 0\}$)．所以开单纯形构成对$|K|$的分割．

若A是$|K|$的非空子集，它包含在某闭单纯形里，则有唯一的最小单纯形$s\in K$使$A\subset|s|$．这个最小单纯形称为A在K里的承载子．若$A\subset\langle s\rangle$，则A的承载子必然是s．特别地，K的任意点α有一个单纯形s使$\alpha\in\langle s\rangle$，作为其承载子．

18．引理 设$A\subset|K|$，则A包含一个离散子集(在上凝聚拓扑中)，由每个与A相交的开单纯形内恰好一个点所组成．

证明 对每个使$A\cap\langle s\rangle\neq\emptyset$的$s\in K$，设$\alpha_s\in A\cap\langle s\rangle$且设$A'=\{\alpha_s\}$．因为任意闭单纯形最多只能包含$A'$的有限子集，这得出$A'$的每子集在上凝聚拓扑中是闭的，即$A'$是离散的．▌

因为任意拓扑空间的紧致子集不可能包含无限离散集，故有以下结果：

19．推论 $|K|$的每个紧致子集包含于有限个开单纯形的并中．▌

一个有限单纯复形的空间是紧致的．从推论 19 可得到其逆命题：

20．推论 单纯复形K是有限的，当且仅当$|K|$是紧致的．▌

我们建立类似于定理 15 的下述同伦定理

21．定理 函数$F: |K|\times I\to X$是连续的，当且仅当

$$F\,|\,(|s|\times I): |s|\times I\to X$$

对每个$s\in K$是连续的．

证明 因为$|K|$关于其闭单纯形有上凝聚拓扑，且每个闭单纯形是$|K|$的闭紧致子集，因之，$|K|$是紧致生成的．由引言的定理2.7，$|K|\times I$也是紧致生成的．由推论19得出，$|K|\times I$的每个紧致子集包含于$|L|\times I$中，L为K的某个有限子复形．所以$|K|\times I$有关于族$\{|L|\times I|L\subset K, L$有限$\}$的上凝聚拓扑．显然此拓扑重合于关于$\{|s|\times I|s\in K\}$的上凝聚拓扑(因为若$L$是有限的，则$|L|\times I$有关于$\{|s|\times I|s\in L\}$的上凝聚拓扑)．∎

若$\varphi: K_1\to K_2$是单纯映射，则存在连续映射$|\varphi|_d: |K_1|_d\to|K_2|_d$，由

$$|\varphi|_d(\alpha)(v')=\sum_{\varphi(v)=v'}\alpha(v)\quad(v'\in K_2)$$

给出．同样的公式定义了连续映射$|\varphi|: |K_1|\to|K_2|$，且有交换方形

$$\begin{array}{ccc}|K_1| & \longrightarrow & |K_1|_d\\ {\scriptstyle|\varphi|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle|\varphi|_d}\\ |K_2| & \longrightarrow & |K_2|_d\end{array}$$

简单地验证便可说明$|\ |$和$|\ |_d$是从单纯复合形范畴到拓扑空间范畴的协变函子，且$|K|\to|K|_d$是它们之间的自然变换．这两个函子也可以看成是从单纯偶范畴到拓扑空间偶范畴的函子．

一个拓扑空间X的一个三角剖分(K, f)由一个单纯复合形K和同胚$f: |K|\to X$组成．若X有一三角剖分，则X称为多面体．类似地，偶(X, A)的一三角剖分$((K, L), f)$由单纯偶(K, L)和同胚$f: (|K|, |L|)\to(X, A)$组成．若(X, A)有一三角剖分，则(X, A)称为多面体偶．一般来说，一个给定的多面体可以有三角剖分(K_1, f_1)和(K_2, f_2)而单纯复形K_1与K_2是不同构的．

下列是一些例子：

22．对于任意的$n\geq 1$，(E^{n+1}, S^n)同胚于$(|s|, |\dot{s}|)$，其中s是$(n+1)$维单纯形．所以(E^{n+1}, S^n)是多面体偶．

23．给定K为例8的单纯复形，且定义$f: |K|\to\mathbf{R}$使

$$f(|\{n\}|)=n$$

及 $f| |\{n, n+1\}|$ 是 $|\{n, n+1\}|$ 到闭区间 $[n, n+1]$ 上的同胚，则 (K, f) 是 $\mathbf{R}$ 的三角剖分，且 $\mathbf{R}$ 是多面体.

24. 对于 $n\geqslant 1$，给定 K 是例 9 的单纯复形，且 $f: |K|\to\mathbf{R}^n$ 由等式 $(f(\alpha))_i=\sum_{x\in e_i}\alpha(x)(x)_i$ 定义. 则 (K, f) 是 $\mathbf{R}^n$ 的三角剖分，且 $\mathbf{R}^n$ 是多面体.

给定一顶点 $v\in K$，定义其星形

$$\mathrm{st}\,v=\{\alpha\in|K|\,|\,\alpha(v)\neq 0\}.$$

因为 $\alpha\to\alpha(v)$ 是从 $|K|_d$ 到 I 的连续映射，所以 $\mathrm{st}\,v$ 是在 $|K|_d$ 中开的，且从而也在 $|K|$ 中是开的. 从定义直接得到

$$\begin{aligned}\alpha\in\mathrm{st}\,v &\Leftrightarrow \alpha \text{ 的承载子以 } v \text{ 为顶点}\\ &\Leftrightarrow \alpha\in\langle s\rangle\text{，其中 } s \text{ 以 } v \text{ 为顶点}.\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{st}\,v=\bigcup\{\langle s\rangle\,|\,v \text{ 是 } s \text{ 的顶点}\}$.

25. 引理 设 $L\subset K$，且设 $v_0, v_1, \cdots, v_q$ 是 K 的顶点. 则 $v_0, v_1, \cdots, v_q$ 是 L 的一个单纯形的顶点，当且仅当

$$\bigcap_{0\leqslant i\leqslant q}\mathrm{st}\,v_i\cap|L|\neq\emptyset.$$

证明 若有单纯形 $s\in L$，以 $v_0, \cdots, v_q$ 为顶点，则 $\langle s\rangle\subset\mathrm{st}\,v_i$ 对每个 i，且 $\langle s\rangle\subset|L|$，所以 $\bigcap\mathrm{st}\,v_i\cap|L|\neq\emptyset$. 反之，若 $\bigcap\mathrm{st}\,v_i\cap|L|\neq\emptyset$，设 $\alpha\in\bigcap\mathrm{st}\,v_i\cap|L|$，则 $\alpha(v_i)\neq 0$(对于 $0\leqslant i\leqslant q$)，且 α 的承载子是 L 的单纯形 s，其顶点包括 $v_0, \cdots, v_q$. 则集合 $\{v_0,\cdots,v_q\}$ 是 s 的面，且必定属于 L，因为 L 是个单纯复形. ▮

这建立了 K 和顶点星形做成的 $|K|$ 的开覆盖之间的下述关系.

26. 定理 设 $\mathscr{U}=\{\mathrm{st}\,v\,|\,v\in K\}$. 则由 $\varphi(v)=\mathrm{st}\,v$ 定义的从 K 到 $K(\mathscr{U})$ 的映射 φ，是单纯同构*) $\varphi: K\approx K(\mathscr{U})$，且对任意的 $L\subset K$，$\varphi|L: L\approx K_L(\mathscr{U})$. ▮

§2 单纯复形中的线性性质

在所有从任意集合到 $\mathbf{R}$ 的函数的集合内的线性构造定义了

*) 单纯同构，记为 $\approx$，是指单纯复形和单纯映射范畴中的等价. ——译注

单纯复形的空间中的线性性质．本节提供对这种线性性质的研究．我们证明一个闭单纯形$|s|$同胚于以$|\dot{s}|$为底的锥形．这蕴涵一个闭单纯形可以取"极坐标"作参数，它对于构造映射是方便的．我们用以证明多面体偶对任意空间有同伦扩充性质．

我们还考虑单纯复形的空间到欧氏空间中的线性嵌入；这要求讨论局部有限的单纯复形．这种复形由下述性质所示性：其空间是局部紧致的；或者等价地，上凝聚和度量拓扑在其空间上重合．

设 K 是单纯复形，并设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 是闭单纯形$|s|$的点．给定实数 $t_1, \cdots, t_p$ 使得 $0 \leqslant t_i \leqslant 1$（对 $i=1, \cdots, p$），且使 $\sum t_i = 1$，则 $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ 也是$|s|$的点．所以每个闭单纯形有一个线性构造，使其点的凸组合也是该闭单纯形的点．反之，若 $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ 有一个单纯形作为其承载子（亦即 $\alpha \in \langle s \rangle$），则每一 $\alpha_i \in |s|$．所以我们有下述引理：

1. 引理 $|K|$的一组点的凸组合仍是$|K|$的点，当且仅当这组点全部位于某个闭单纯形中．▌

我们将会发现把 K 的顶点与其示性函数等同起来是方便的．亦即，若 v 是 K 的顶点，我们也视 v 是函数，定义在 K 的所有顶点 v' 上，使

$$v(v') = \begin{cases} 0 & v' \neq v \\ 1 & v' = v. \end{cases}$$

若 $\alpha \in |K|$，则我们可写

$$\alpha = \sum_{v \in K} \alpha(v) v,$$

右侧的和是$|K|$的点的凸组合．

设 X 是拓扑空间，它是某实向量空间的子集．对于 X 与有限维子空间的交来说，假设 X 有上凝聚拓扑，其中每个这样的交作为它所在的那个有限维线性拓扑空间的子拓扑空间．例如，X是欧氏空间或 X 是单纯复形的空间．连续映射 $f: |K| \to X$ 称为在 K 上是线性的，若它按重心坐标的语言是线性的．亦即，f 是线性的，若对每个 $\alpha \in |K|$，$\sum_{v \in K} \alpha(v) f(v)$ 是 X 的点，且

$$f(\alpha)=\sum_{v\in X}\alpha(v)f(v).$$

于是显然，线性映射唯一地取决于从 K 的顶点到 X 的顶点映射 f_0 使 $f_0(v)=f(v)$. 反之，从 K 的顶点到 X 的一个映射可被扩充为线性映射 $f: |K|\to X$，当且仅当对每个单纯形 $s\in K$，所有 $f_0(s)$ 中的元素的凸组合位于 X 中.

若 $\varphi: K_1\to K_2$ 是单纯映射，则 $|\varphi|$ 的定义表明

$$|\varphi|(\alpha)=\sum\alpha(v)|\varphi|(v).$$

所以 $|\varphi|$ 是线性的.

设 X 是拓扑空间. 以 X 为底，以 w 为顶点的锥形 $X*w$ 定义为常值映射 $X\to w$ 的映射柱. $X*w$ 的点由 $[x, t]$ 给出参数表示，对 $x\in X$ 和 $t\in I$，其中 $x\in X$ 等同于 $[x, 0]$，且 $[x, 1]$ 等同于 w（对所有 $x\in X$）. 因为 w 是 $X*w$ 的强形变收缩核，故锥形是可缩的.

2. 引理 对 K 的任一单纯形 s，锥形 $|\dot{s}|*w$ 同胚于 $|s|$.

证明 选择点 $w_0\in\langle s\rangle$，且定义映射 $f: |\dot{s}|*w\to|s|$ 使

$$f([\alpha, t])=tw_0+(1-t)\alpha.$$

则 f 是连续的（因为在 $|s|$ 中线性运算是连续的）. 为了证明 f 是单映，设 $f([\alpha, t])=f([\beta, t'])$（对 $\alpha, \beta\in|\dot{s}|$ 和 $t, t'\in I$）. 则

$$tw_0+(1-t)\alpha=t'w_0+(1-t')\beta.$$

设 s 有顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_q$，且设 $\alpha=\sum\alpha_i v_i$，$\beta=\sum\beta_i v_i$ 及 $w_0=\sum\gamma_i v_i$. 因为 $\alpha, \beta\in|\dot{s}|$，故有 j 使 $\alpha_j=0$，且有 k 使 $\beta_k=0$. 于是

$$t\gamma_j=t'\gamma_j+(1-t')\beta_j \quad 和 \quad (t-t')\gamma_j=(1-t')\beta_j.$$

因为 $\gamma_j\neq0$，故 $t\geq t'$. 类似地，

$$t\gamma_k+(1-t)\alpha_k=t'\gamma_k,$$

且从而 $t'\geq t$，所以 $t=t'$. 这导出 $(1-t)\alpha=(1-t)\beta$. 且若 $t\neq1$，则 $\alpha=\beta$. 所以或则 $t=t'$ 且 $\alpha=\beta$，或则 $t=t'=1$. 每种情况下

$$[\alpha, t]=[\beta, t']$$

皆成立. 故 f 是单映.

我们现证明 f 是满映. 显然，

$$f([\alpha,\ 0])=\alpha,\quad f([\alpha,\ 1])=w_0,$$

从而 f 映到 $|\dot{s}|$ 上及 w_0 上. 为了证明 $\langle s\rangle - w_0$ 的每点是在从 w_0 到 $|\dot{s}|$ 中某点的唯一联线段上, 设 $\alpha\in\langle s\rangle$, $\alpha\neq w_0$, 且设 $\alpha=\sum\alpha_i v_i$. 考虑函数 $\varphi(t')=(1+t')\alpha-t'w_0$. $\varphi(0)=\alpha\in\langle s\rangle$, 且随 t' 增大, $\varphi(t')$ 的重心坐标连续地变化. 因为 $\alpha\neq w_0$, 故存在某个 i 使 $\alpha_i<\gamma_i$. 所以

$$\varphi(t')(v_i)=\alpha_i-t'(\gamma_i-\alpha_i)$$

是 t' 的单调递减函数. 从其连续性得出, 存在唯一的 $t'>0$ 使

$$\varphi(t')(v_i)=0.$$

从而存在 $t'_0>0$, 它是对任意 $0\leqslant i\leqslant q$ 使 $\varphi(t')(v_i)=0$ 的诸 t' 中最小的一个. 于是 $\varphi(t'_0)\in|\dot{s}|$, 且

$$\alpha=\frac{t'_0}{1+t'_0}w_0+\frac{1}{1+t'_0}\varphi(t'_0)$$

证明了 $\alpha=f([\varphi(t'_0),\ t'_0/(1+t'_0)])$. 故 f 是满映.

因为 f 是从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续的双映, 所以 f 是同胚. ▌

定义单纯形 $s=\{v_0,\ v_1,\ \cdots,\ v_q\}$ 的重心 $b(s)$ 为点

$$b(s)=\sum_{0\leqslant i\leqslant q}\frac{1}{q+1}v_i.$$

显然, $b(s)\in\langle s\rangle$, 且从而 $b(s)$ 的承载子为 s. 由引理 2, $|s|$ 同胚于 $|\dot{s}|*w$, 其方式为将 w 对应于 $b(s)$. 若 $\alpha\in|\dot{s}|$ 且 $t\in I$, 则 $|s|$ 的点 $tb(s)+(1-t)\alpha$ 由极坐标 $[\alpha,\ t]$ 给出参数, 其中 $[\alpha,\ t]$ 表示 $|\dot{s}|*w$ 中与 $|s|$ 中给定点对应的点. 则 $[\alpha,\ 0]=\alpha$ 及 $[\alpha,\ 1]=b(s)$ (对所有的 $\alpha\in|\dot{s}|$). 对下述同伦我们应用极坐标.

3. 引理 对任意单纯形 s, $|s|\times 0\cup|\dot{s}|\times I$ 是 $|s|\times I$ 的强形变收缩核.

证明 若 s 是 0 维单纯形, 则 $|\dot{s}|=\emptyset$, 且已知点 $|s|\times 0$ 是闭区间 $|s|\times I$ 的强形变收缩核. 若 $\dim s>0$, 我们定义一强形变收缩

$$F:\ |s|\times I\times I\to|s|\times I,$$

是 $|s|\times I$ 到 $|s|\times 0\cup|\dot{s}|\times I$ 的, 由极坐标的公式

$$F([\alpha, t], t', t'')$$

$$=\begin{cases}\left(\left[\alpha, (1-t'')t+\dfrac{t''(2t-t')}{2-t'}\right], (1-t'')t'\right) \\ \quad (t'\leqslant 2t) \\ \left([\alpha, (1-t'')t], (1-t'')t'+\dfrac{t''(t'-2t)}{1-t}\right) \\ \quad (2t\leqslant t')\end{cases}$$

给出．对1维单纯形和2维单纯形的情况，此同伦如图9中所表示。

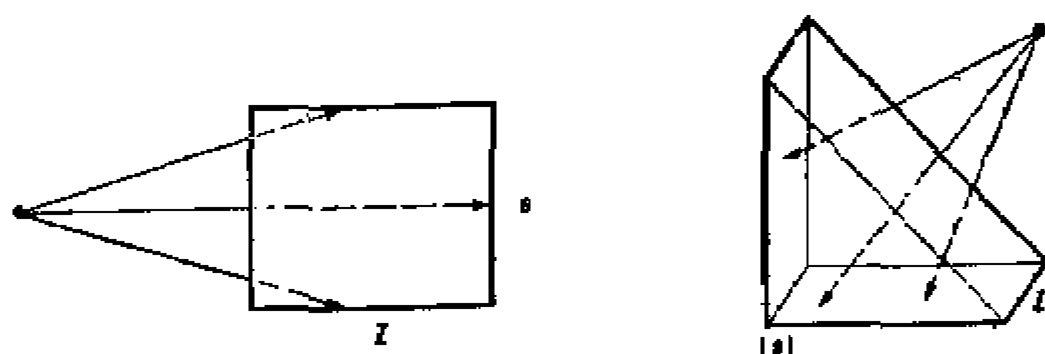


图 9

4 推论 对任意子复形 $L\subset K$，子空间 $|K|\times 0\cup|L|\times I$ 是 $|K|\times I$ 的强形变收缩核．

证明 设 $X^n=|K|\times 0\cup|K^n\cup L|\times I$（对于 $n\geqslant -1$）．我们首先证明，对每 $n\geqslant 0$，空间 X^{n-1} 是 X^n 的强形变收缩核．对每个 n 维单纯形 $s\in K-L$，设 F_s: $|s|\times I\times I\to|s|\times I$ 是 $|s|\times I$ 到 $|s|\times 0\cup|\dot{s}|\times I$ 的强形变收缩（由引理3，这是存在的）．对 $n\geqslant 0$，由条件

$$F_n||s|\times I\times I=F_s,$$

对 n 维单纯形

$$s\in K-L$$

$$F_n(x, t)=x,\quad x\in X^{n-1},\quad t\in I$$

定义映射 $$F_n: X\times I\to X^n.$$

则 F_n 是完全确定了的，且连续（因为对每个单纯形 s，$F_n||s|\times I\times I$ 连续的），且 F_n 是 X^n 到 X^{n-1} 的强形变收缩．

设 f_n: $X^n\to X^{n-1}$ 是收缩，由 $f_n(x)=F_n(x, 1)$（对于 $x\in X^n$）

所定义．设 $a_n=\frac{1}{n}$ (对于 $n\geqslant 1$)，且对 n 归纳定义 $G_n: X^n\times I\to X^n$，使

$$G_0(x,\ t)=\begin{cases} x & (0\leqslant t\leqslant a_2)\\ F_0\left(x,\ \dfrac{t-a_2}{1-a_2}\right) & (a_2\leqslant t\leqslant 1)\end{cases}$$

且对于 $n\geqslant 1$

$$G_n(x,\ t)=\begin{cases} x & (0\leqslant t\leqslant a_{n+2})\\ F_n\left(x,\ \dfrac{t-a_{n+2}}{a_{n+1}-a_{n+2}}\right) & (a_{n+2}\leqslant t\leqslant a_{n+1})\\ G_{n-1}(f_n(x),\ t) & (a_{n+1}\leqslant t\leqslant 1).\end{cases}$$

易于对 n 归纳核验 G_n 是 X^n 到 X^{n-1} 的强形变收缩，使

$$G_n|X^{n-1}\times I=G_{n-1}.$$

所以有映射

$$G: |K|\times I\times I\to|K|\times I,$$

使 $G|X^n\times I=G_n$．则 G 是 $|K|\times I$ 到 $|K|\times 0\cup|L|\times I$ 的强形变收缩．∎

5．推论 多面体偶对任意空间有同伦扩充性质．

证明 只需证明，若 $L\subset K$，则 $(|K|,\ |L|)$ 对任意空间 Y 有同伦扩充性质即可．给定 $g: |K|\to Y$，及 $G: |L|\times I\to Y$ 使 $G(\alpha,\ 0)=g(\alpha)$ (对于 $\alpha\in|L|$)．设 $f: |K|\times 0\cup|L|\times I\to Y$ 由 $f(\alpha,\ 0)=g(\alpha)$ (对 $\alpha\in|K|$) 及 $f(\alpha,\ t)=G(\alpha,\ t)$ (对 $\alpha\in|L|$ 和 $t\in I$) 给出．因为 $|L|$ 是在 $|K|$ 中的闭集，故 f 是连续的．由推论 4，$|K|\times 0\cup|L|\times I$ 是 $|K|\times I$ 的收缩核．所以 f 可扩充为映射 $F: |K|\times I\to Y$．于是 $F(\alpha,\ 0)=g(\alpha)$ (对 $\alpha\in|K|$) 且

$$F||L|\times I=G.\ ∎$$

现在让我们来考虑把 $|K|$ 线性嵌入欧氏空间中．

6 引理 线性映射 $f: |s|\to\mathbf{R}^n$ 是嵌入，当且仅当它映 s 的顶点集合到 $\mathbf{R}^n$ 的仿射无关的集合．

证明 设 $f(v_i)=p_i$，其中 $s=\{v_i\}$．下面证明集合 $\{p_i\}$ 是仿射相关的，当且仅当 f 不是单映．$\{p_i\}$ 是仿射相关的当且仅当存

在不全为 0 的 α_i 使 $\sum\alpha_i p_i=0$ 且 $\sum\alpha_i=0$. 假设点 p_i 这样排列使得 $\alpha_i\geqslant 0$(对 $i\leqslant j_0$)和 $\alpha_i<0$(对 $i>j_0$). 则

$$\sum_{i\leqslant j_0}\alpha_i p_i=\sum_{i>j_0}(-\alpha_i)p_i.$$

若

$$a=\sum_{i\leqslant j_0}\alpha_i=\sum_{i>j_0}(-\alpha_i),$$

则

$$\sum_{i\leqslant j_0}(\alpha_i/a)p_i=\sum_{i>j_0}(-\alpha_i/a)p_i.$$

从 f 的线性性质,

$$f\Big(\sum_{i\leqslant j_0}(\alpha_i/a)v_i\Big)=f\Big(\sum_{i>j_0}(-\alpha_i/a)v_i\Big),$$

证明了 f 不是单映.

反之, 若 f 不是单映, 则 $f(\sum\alpha_i v_i)=f(\sum\beta_i v_i)$, 其中 $\alpha_{j_0}\neq\beta_{j_0}$(对于某 j_0). 则 $\sum(\alpha_i-\beta_i)p_i=0$ 且 $\sum(\alpha_i-\beta_i)=0$. 因为 $\alpha_{j_0}-\beta_{j_0}\neq 0$, 故集合 $\{p_i\}$ 是仿射相关的. ▌

单纯复形 K 称为*局部有限的*, 若 K 的每个顶点 v 仅属于 K 的有限个单纯形.

7. 引理 *若 K 是局部有限的, 则 $|K|_d$ 的每个点有形如 $|L|_d$ 的邻域, 其中 L 是 K 的有限子复形.*

证明 设 $\alpha\in|K|_d$, 则 $\alpha\in\operatorname{st}v$(对 K 的某顶点 v). 因为 v 仅是 K 的有限多个单纯形 $\{s_i\}$ 的顶点, 故 $\operatorname{st}v$ 包含在紧致集 $\bigcup|s_i|$ 中. 设 $L=\{s\in K\mid s$ 是 s_i 的面(对某个 i)$\}$, 则 L 是 K 的有限子复形, 且 $\alpha\in\operatorname{st}v\subset|L|_d$. ▌

8. 定理 *对单纯复形 K, 下列各条是等价的:*

(a) *K 是局部有限的;*

(b) *$|K|$ 是局部紧致的;*

(c) *$|K|\to|K|_d$ 是同胚;*

(d) *$|K|$ 是可度量化的;*

(e) *$|K|$ 满足第一可数性公设.*

证明 (a)$\Rightarrow$(b): 由引理 7, 若 α 是 $|K|_d$ 的点, 则存在有限子复形 $L\subset K$, 使得 α 在 $|L|_d$ 内部. 由是 α 在 $|K|$ 中的 $|L|$ 的内部. 所以 $|L|$ 是 α 在 $|K|$ 中的紧致邻域.

(b)⇒(c)：为了证明$|K|\to|K|_d$是开映射，设U是$|K|$的开子集，在$|K|$中有紧致闭包$\bar{U}$．只要证明U在$|K|_d$中是开的即可．因为$\bar{U}$是紧致的，故存在有限子复形$L\subset K$使$U\subset|L|$（由推论3.1.19）．设K_1是K的子复形，由

$$K_1=\{s\in K\mid |s|\cap U=\emptyset\}$$

定义．若$s\in K-K_1$，则$|s|\cap U$是$|s|$的非空开子集．所以

$$\langle s\rangle\cap U\neq\emptyset \quad \text{且} \quad \langle s\rangle\cap|L|\neq\emptyset.$$

因为K的全体开单纯形组成K，这蕴涵$s\in L$，且证明了

$$K=K_1\cup L.$$

于是，$|K|_d-|K_1|_d$是$|K|_d$的开子集．因为L是有限子复形，$|L|\to|L|_d$是同胚．所以U在$|L|_d$中是开的，从而它在$|L|_d-|K_1|_d$中是开的．因为

$$|L|_d-|K_1|_d=|K|_d-|K_1|_d,$$

故U在$|K|_d$中是开的．

(c)⇒(d)：因为$|K|_d$是可度量化的，若$|K|$和$|K|_d$是同胚的，则$|K|$也是可度量化的．

(d)⇒(e)：每个可度量化的空间满足第一可数公设．

(e)⇒(a)：假定K不是局部有限的，且设v是K的单纯形的无限集$\{s_i\}_{i=1,2,\cdots}$的顶点．假设v在K中的邻域有可数基$\{U_i\}_{i=1,2,\cdots}$．不失一般性，我们可以假设$U_i\supset U_{i+1}$(对于所有的$i\geqslant1$)．对每i，$\langle s_i\rangle\cap U_i\neq\emptyset$，因为作为$s_i$的顶点的$v$在$\langle s_i\rangle$的闭包中．设$\alpha_i\in\langle s_i\rangle\cap U_i$．则序列$\{\alpha_i\}$以$v$作为极限点(因为每个$U_i$包含所有$\alpha_j(j\geqslant i)$)．但在上凝聚拓扑中$\{\alpha_i\}$是离散的，因为它与每个闭单纯形$|s|$相交于有限集．▌

单纯复形K在$\mathbf{R}^n$中的一个实现是$|K|$在$\mathbf{R}^n$中的一个线性嵌入．下述定理指出在某个欧氏空间哪些单纯复形K有实现．

9．定理 若K在$\mathbf{R}^n$中有一个实现，则K是可数的且局部有限的，且$\dim K\leqslant n$．反之，若K是可数的且局部有限的，且$\dim K\leqslant n$，则K有一个实现在$\mathbf{R}^{2n+1}$中作为闭子集．

证明 设$f:|K|\to\mathbf{R}^n$是线性嵌入．若K是不可数的，由引

理 3.1.18 得出$|K|$包含不可数离散集合A'. 于是$f(A')$是$\mathbf{R}^n$的不可数的离散子集，这是不可能的，因为$\mathbf{R}^n$是可分的. 所以K是可数的. 显然，$|K|$是可度量化的，且由定理 8，K是局部有限的. 从引理 6 及引言中的定理 5.3，$\dim K\leqslant n$.

为了证明逆命题，设$\{p_i\}$是$\mathbf{R}^{2n+1}$的点列，使

(a) 每$2n+2$个点p_i的集合是仿射无关的；

(b) 若C是$\mathbf{R}^{2n+1}$的任意紧致子集，则存在j，使C与$\mathbf{R}^{2n+1}$中由集合$\{p_i|i\geqslant j\}$生成的凸子集分离.

例如，设$H_1\supset H_2\supset\cdots$是$\mathbf{R}^{2n+1}$的闭半空间递减序列，使$\bigcap H_i=\emptyset$. 且假设$p_i$对$i<q$已被定义，归纳地选取$p_q$为$H_q$中的一点，不位于任意有限个由集合$\{p_i|1\leqslant i\leqslant j-1\}$中$2n+1$个或更少的点所决定的仿射流形上.

假设K是可数和局部有限的，且$\dim K\leqslant n$，并设$\{v_i\}_{i=1,2,\cdots}$是一列K的顶点. 定义$f:|K|\to\mathbf{R}^{2n+1}$为线性映射，使$f(v_i)=p_i$. 从条件(a)可得出，对任意$s\in K$，$f||s|$是$|s|$在$|K|$中的线性嵌入，且若$s$和$s'\in K$，则

$$f(|s|\cap|s'|)=f(|s|)\cap f(|s'|).$$

所以f是单映. 由条件(b)，若C是$\mathbf{R}^{2n+1}$的任意紧致子集，则有j使得$f^{-1}(C)\subset\bigcup\{\mathrm{st}\,v_i|i\leqslant j\}$. 因$K$是局部有限的，这蕴涵$f^{-1}(C)\subset|L|$对某个有限子复形$L\subset K$. 所以在$|K|$中$f^{-1}(C)$是紧致的. 若$A$在$|K|$中是闭的，且$C$在$\mathbf{R}^{2n+1}$中是紧致的，则

$$f(A)\cap C=f(A\cap f^{-1}(C))$$

在C中是闭的[因为$A\cap f^{-1}(C)$是$|K|$的紧致子集$f^{-1}(C)$的闭子集，且$f|f^{-1}(C)$是$f^{-1}(C)$到$f(f^{-1}(C))$的同胚]. 所以f是闭映射，且是K在$\mathbf{R}^{2n+1}$中使之成为闭子集的线性嵌入. ∎

§3 重 分

我们对单纯复形的主要兴趣在于用它们所描述的多面体. 为了研究一个多面体，考虑对它的不同的三角剖分及其相互关系是

重要的. 本节给出对于多面体的"小的"三角剖分存在的证明用来在下节证明多面体间的任意连续映射可以由单纯映射来逼近.

设 K 是单纯复形. K 的一个重分是单纯复形 K', 满足:

(a) K' 的顶点是 $|K|$ 的点;

(b) 若 s' 是 K' 的单纯形, 则存在 K 的某单纯形 s 使 $s'\subset|s|$ (即 s' 是 $|s|$ 的有限非空子集);

(c) 把 K' 的每个顶点映到 $|K|$ 的对应点的线性映射 $|K'|\to|K|$ 是同胚.

注意, 条件(a)和(b)保证了 K' 的每单纯形 s' 有承载子 $s\in K$. 若 K' 是 K 的重分, 我们将 $|K'|$ 和 $|K|$ 以条件(c)的线性同胚等同起来. 从定义直接得到以下的事实:

1. *K 的重分的任意重分还是 K 本身的重分.* ∎

下一个事实亦成立(证明略困难些).

2. *若 K' 和 K'' 是 K 的重分; 则存在 K 的重分 K''', 它是 K' 和 K'' 的重分.* ∎

这样, 命题 1 和 2 保证了 K 的重分形成相对于由重分关系定义的偏序的顺向集.

3. 引理 *设 K 和 K' 是单纯复形, 满足条件(a)和(b). 若 $s\in K$ 是 $s'\in K'$ 的承载子, 则 $\langle s'\rangle\subset\langle s\rangle$.*

证明 设 $v'_0, \cdots, v'_p$ 是 s' 的顶点, 且设 $v_0, \cdots, v_q$ 是 s' 的承载子 s 的顶点. 因为 $s'\subset|s|$, 故对 $0\leqslant i\leqslant p$, $v'_i=\sum\alpha_{ij}v_j$. 因为 s 是最小的这种复形, 故对 $0\leqslant j\leqslant q$ 存在 $0\leqslant i\leqslant p$ 使 $\alpha_{ij}\neq 0$. 设 $\beta\in\langle s'\rangle$. 则

$$\beta=\sum_i\beta_i v'_i=\sum_j\Big(\sum_i\beta_i\alpha_{ij}\Big)v_j,$$

且因为 $\beta_i>0$ (对所有 i), 故 $\sum\limits_i\beta_i\alpha_{ij}>0$ (对所有 j). 所以 $\beta\in\langle s\rangle$, 且 $\langle s'\rangle\subset\langle s\rangle$. ∎

4. 定理 *设 K' 和 K 是单纯复形, 满足条件(a)和(b), 则 K' 是 K 的重分, 当且仅当对 $s\in K$, 集合 $\{\langle s'\rangle\,|\,s'\in K', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}$ 是 $\langle s\rangle$ 的有限分割.*

证明 假设 K' 和 K 满足条件(a)和(b)及条件 $\{\langle s'\rangle | s'\in K', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}$ 是对 $s\in K$ 的$\langle s\rangle$的有限分割. 因为任意单纯形 $s\in K$ 仅有有限个面,故有

$$K'(s)=\{s'\in K' | 存在\ s\ 的面\ s_1\ 使\langle s'\rangle\subset\langle s_1\rangle\}$$

是 K' 的有限子复形,且映 $K'(s)$的每个顶点到自身的线性映射 $h_s: |K'(s)|\to|s|$ 是同胚. 所以存在连续映射 $g: |K|\to|K'|$ 使 $g||s|=h_s^{-1}$(对于 $s\in K$),它是线性映射 $h: |K'|\to |K|$的逆. 所以 h 是同胚,且 K' 和 K 满足条件(c).

反之,若 K' 是 K 的重分,则$\{s'|s'\in K'\}$是$|K'|=|K|$的分割. 对于 $s\in K$,考虑集合$\langle s'\rangle\cap\langle s\rangle$ (对 $s'\in K'$). 由引理 3,或则 $\langle s'\rangle\cap\langle s\rangle=\emptyset$ 或则 $\langle s'\rangle\subset\langle s\rangle$. 所以 $\{\langle s'\rangle | s'\in K', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}$ 是 $\langle s\rangle$ 的分割. 因为$|s|$是紧致的,由推论 3.1.19 得出,此集合是$\langle s\rangle$的有限分割. ▌

我们用此结果说明 K 的任意重分同时也重分了 K 的每个子复形.

5. 推论 设 K' 是 K 的重分,且设 L 是 K 的子复形. 则存在 K' 的唯一子复形 L' 是 L 的重分.

证明 若 L' 是 K' 的子复形,是 L 的重分,则

$$L'=\{s'\in K' | \langle s'\rangle\subset|L|\}.$$

这证明了 L' 的唯一性. 为了证明 L' 的存在性,我们来证明 $\{s'\in K' | \langle s'\rangle\subset|L|\}$ 有所需的性质. 显然,这集合是 K' 的子复形 L',且 L' 和 L 满足上述的条件(a)和(b). 我们用定理 4 来证明 L' 是 L 的重分. 若 $s\in L$,由定理 4,集合 $\{\langle s'\rangle | s'\in K', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}$ 是 $\langle s\rangle$ 的有限分割,由 L' 的定义,有

$$\{\langle s'\rangle | s'\in K', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}=\{\langle s'\rangle | s'\in L', \langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}.$$

所以,由定理 4, L' 是 L 的重分. ▌

在推论 5 中的 L 的重分 L' 称为 L 的由 K' 诱导的重分,并记作 $K'|L$.

由重分的定义可直接得到两个事实:

6. 若 $f: |K|\to X$ 是在 K 上线性的,且 K' 是 K 的重分,则

f 在 K' 上也是线性的. ▌

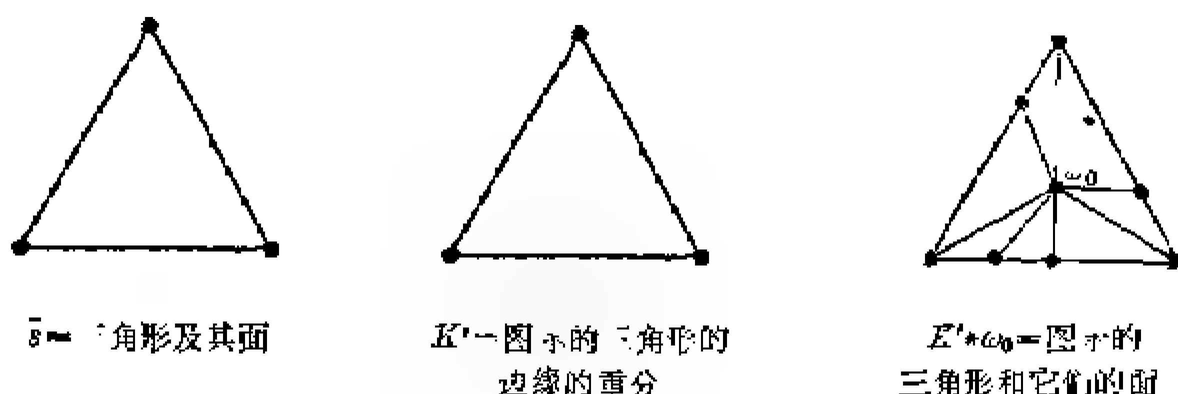
7. 若 $((K, L), f)$ 是 (X, A) 的三角剖分, 且 K' 是 K 的重分, 则 $((K', K'|L), f)$ 也是 (X, A) 的三角剖分. ▌

对任意单纯复形我们构造特殊的重分, 称为重心重分. 为此, 我们需要以下的引理, 它说明对任一单纯形 s 如何把 $\dot{s}$ 的重分扩充到 $\bar{s}$ 的重分.

8. 引理 设 s 是某单纯复形的单纯形, 且设 K' 是 $\dot{s}$ 的重分, 则对任一 $w_0 \in \langle s \rangle$, $K' * w_0$ 是 $\bar{s}$ 的重分.

证明 在引理 8 的命题中, w_0 视为只有一个顶点的单纯复形, 且 $K' * w_0$ 是其联接, 在例 3.1.7 中已给出其定义. 显然, $K' * w_0$ 满足对 $\bar{s}$ 的重分的要求 (a) 和 (b). 从引理 3.2.2 推出, $|s|$ 的任一点或则等于 w_0, 属于 $|\dot{s}|$, 或则属于形如 $\langle s' \cup \{w_0\} \rangle$ 的唯一的开单纯形, 其中 $s' \in K'$. 所以 $|K' * w_0|$ 的开单纯形构成 $|s|$ 的有限分割, 且由定理 4, $K' * w_0$ 是 $\bar{s}$ 的重分. ▌

对于 2 维单纯形 s, 图 10 表示用引理 8 对 $\bar{s}$ 得到的重分.



$\bar{s}$ = 三角形及其面　　K' = 图示的三角形的边缘的重分　　$K' * w_0$ = 图示的三角形和它们的面

图 10

我们现已准备好了证明重心重分的存在性. 设 K 是单纯复形. 我们定义 sd K 为一个单纯复形, 其顶点为 K 的单纯形的重心, 其单纯形为在 K 中由与面有关的所给出全序的单纯形重心的有限非空集合. 这样, sd K 的单纯形是有限集合 $\{b(s_0), \cdots, b(s_q)\}$, 其中 s_{i-1} 是 s_i 的面 (对 $i = 1, \cdots, q$). 我们也假定 sd K 的单纯形的顶点按此顺序排列.

显然, sd K 是单纯复形; 且若 L 是 K 的子复形, 则 sd L 是

sd K 的子复形. 进一步, 若 $b(s_0)$ 是单纯形 $s'\in \mathrm{sd}\,K$ 的最后顶点, 则 $s'\subset|s_q|$, 且因 s_q 是 $b(s_q)$ 的承载子, 则 s_q 是 s' 的承载子. 所以 sd K 和 K 满足条件(a)和(b).

9. 定理 sd K 是 K 的一个重分.

证明 我们来说明 sd$K$ 和 K 满足定理 4 的条件. 若 $s\in K$, 则由引理 3 和上述考察,

$$\{s'\in \mathrm{sd}\,K\,|\,\langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}=\{s'\in \mathrm{sd}\,K\,|\,s' \text{ 的最后顶点 } =b(s)\}$$
$$=\{s'\in \mathrm{sd}\,\bar{s}\,|\,\langle s'\rangle\subset\langle s\rangle\}.$$

所以我们仅需说明 sd s 是 s 的重分(对任意 $s\in K$). 我们对 $\dim s$ 来归纳证明: 若 $\dim s=0$, 则 $\mathrm{sd}\,\bar{s}=\bar{s}$ 是 $\bar{s}$ 的重分. 对 $q>0$, 假定 sd s_1 是 $\bar{s}_1$ 的重分, 对每个满足 $\dim s_1<q$ 的 s_1 成立, 且设 s 是 q 维单纯形. 由归纳假定, $\mathrm{sd}\,\dot{s}$ 是 $\dot{s}$ 的重分. 重心重分的定义说明了

$$\mathrm{sd}\,\bar{s}=\mathrm{sd}\,\dot{s}*b(s).$$

由引理 8, 这是 s 的重分. ∎

重分 sd K 称为 K 的*重心重分*. 对 $n\geqslant0$ 归纳定义累次重心重分 $\mathrm{sd}^n K$ 为

$$\mathrm{sd}^0 K=K,$$
$$\mathrm{sd}^n K=\mathrm{sd}(\mathrm{sd}^{n-1}K)\quad(n\geqslant1).$$

10. 引理 *若 L 是 K 的子复形, 则 sd L 是 sd K 的满子复形.*

证明 设 $\{b(s_0), \cdots, b(s_q)\}$ 是 sd K 的单纯形, 其顶点全部属于 sd L. 则 s_{i-1} 是 s_i 的面(对 $i=1, \cdots, q$)及每一个 $s_i\in L$. 所以 $\{b(s_0), \cdots, b(s_q)\}\in \mathrm{sd}\,L$. ∎

11. 推论 *设 (X, A) 是多面体偶. 则 A 是 A 在 X 中某邻域的强形变收缩核.*

证明 由命题 7 和引理 10, 只要考虑 $(X, A)=(|K|, |L|)$ 这个情况即可, 其中 L 是 K 的满子复形: 设 N 是 K 的与 L 分离的最大子复形. 下面证明 L 是 $|K|-|N|$ 的强形变收缩核. 若 $\alpha\in|K|-|N|$, 由引理 3.1.10, 或则 $\alpha\in|L|$, 或则存在顶点 $v_0, \cdots, v_p\in L$ 及顶点 $v_{p+1}, \cdots, v_q\in N$, 其中 $0\leqslant p\leqslant q-1$, 使

$\alpha\in\langle v_0,\cdots,v_q\rangle$. 在后一情况下，$\alpha=\sum_{0\leqslant i\leqslant q}\alpha_i v_i$，其中 $\alpha_i>0$，且定义 $a=\sum_{0\leqslant i\leqslant p}\alpha_i$. 则 $0<a<1$，且设 $\alpha_i'=\alpha_i/a$（对 $0\leqslant i\leqslant p$）和 $\alpha_i''=\alpha_i/(1-a)$（对 $p+1\leqslant i\leqslant q$）. 则 $\alpha=a\alpha'+(1-a)\alpha''$，其中

$$\alpha'=\sum_{0\leqslant i\leqslant p}\alpha_i' v_i$$

在 $|L|$ 中，而 $\alpha''=\sum_{p+1\leqslant i\leqslant q}\alpha_i'' v_i$ 在 $|N|$ 中. $|K|-|N|$ 到 $|L|$ 的强形变收缩 $F:(|K|-|N|)\times I\to|K|-|N|$ 由

$$F(\alpha,t)=\begin{cases}\alpha & (\alpha\in|L|,t\in I)\\ t\alpha'+(1-t)\alpha & (\alpha\in|K|-(|N|\cup|L|),t\in I)\end{cases}$$

所定义. F 是连续的，因为 $F||L|\times I$ 连续，且对 K 的任意单纯形如 $s'\cup s''$ 形式的，其中 $s'\in L$ 及 $s''\in N$，$F|[|s'\cup s''|\cap(|K|-|N|)]\times I$ 是连续的. ∎

设 X 是多面体且设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. X 的一个三角剖分 (K,f) 称为比 $\mathscr{U}$ 细的，若对每个顶点 $v\in K$ 有 $U\in\mathscr{U}$ 使

$$f(\operatorname{st} v)\subset U.$$

单纯复形 K 称作比 $|K|$ 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 细的，若 K 的三角剖分 $(K,1_K)$ 是比 $\mathscr{U}$ 细的（亦即，对每个顶点 $v\in K$，有 $U\in\mathscr{U}$ 使 $\operatorname{st} v\subset U$）. 我们证明若 $\mathscr{U}$ 是紧致多面体的任意开覆盖，则存在比 $\mathscr{U}$ 细的三角剖分.

$|K|$ 上的一个度量称为在 K 上是线性的，若它是从 $\mathbf{R}^n$ 的模由 K 在 $\mathbf{R}^n$ 中的实现所诱导的. 任意有限单纯复形有线性度量，且若 K' 是 K 的任意重分，则 $|K|$ 上的线性度量在 $|K'|$ 上也是线性的.

12. 引理 *给定 m 维单纯形 s 上一个线性度量，则对任意的 $s'\in\operatorname{sd}s$，*

$$\operatorname{diam}|s'|\leqslant\frac{m}{m+1}\operatorname{diam}|s|.\ ^{*)}$$

---

* 本书与一般书不同，没有脱离单纯复形而定义单纯形. 故前边提到单纯形，都指明为某个单纯复形的单纯形. 因此这里的 s 也要理解为某个单纯复形的一个 m 维单纯形. 同时，上文线性度量仅是对单纯复形定义的，因此，这里的 s 又要理解为 $\bar{s}$（常暂为其闭包复形）. ——译注

证明 设 $\{p_j|0\leqslant j\leqslant m\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的点，且假设 y 是 $\{p_j\}$ 的凸组合(亦即 $y=\sum t_i p_i$，其中 $\sum t_i=1$ 及 $t_i\geqslant 0$)，且设 $x\in\mathbf{R}^n$，则

$$\|x-y\|=\|x-\sum t_j p_j\|=\|\sum t_j(x-p_j)\|\leqslant\sum t_j\|x-p_j\|.$$

所以 $\|x-y\|\leqslant\sup\|x-p_j\|$. 若 x 也是 $\{p_j\}$ 的凸组合，则

$$\|x-y\|\leqslant\sup\|p_i-p_j\|.$$

视 $|s|$ 为在 $\mathbf{R}^n$ 中的线性嵌入，顶点为 $p_0, p_1, \cdots, p_m$. 则由上述结果，$\operatorname{diam}|s|\leqslant\sup\|p_i-p_j\|$，且若 s' 是 $\operatorname{sd}\dot{s}$ 的单纯形，则

$$\operatorname{diam}|s'|\leqslant\sup\{\|p'-p''\|\,|\,p', p''\in s'\}.$$

所以我们仅需说明，若

$$p'=(p_0+\cdots+p_q)/(q+1)$$

和
$$p''=(p_0+\cdots+p_r)/(r+1)\quad(q\leqslant r),$$

则
$$\|p'-p''\|\leqslant[m/(m+1)]\sup\|p_i-p_j\|$$

即可. 又由上述结果，有

$$\|p'-p''\|\leqslant\sup\{\|p_i-p''\|\,|\,0\leqslant i\leqslant q\}.$$

又关于 $0\leqslant i\leqslant q$，有

$$\|p_i-p''\|=\left\|p_i-\frac{1}{r+1}\sum_{0\leqslant j\leqslant r}p_j\right\|\leqslant\frac{1}{r+1}\sum_{0\leqslant j\leqslant r}\|p_i-p_j\|$$
$$\leqslant\frac{r}{r+1}\sup\|p_i-p_j\|.$$

所以

$$\|p'-p''\|\leqslant\frac{r}{r+1}\sup\{\|p_i-p_j\|\,|\,0\leqslant i\leqslant q,\ 0\leqslant j\leqslant r\}$$
$$\leqslant\frac{r}{r+1}\operatorname{diam}|s|.$$

因为 $r\leqslant m$，故 $\frac{r}{r+1}\leqslant\frac{m}{m+1}$，且从而

$$\operatorname{diam}|s'|\leqslant\frac{m}{m+1}\operatorname{diam}|s|. \quad \blacksquare$$

给定 K 上的度量，我们定义 K 的网格(mesh)

$$\operatorname{mesh}K=\sup\{\operatorname{diam}|s|\,|\,s\in K\}.$$

13. 推论 若 K 是 m 维单纯复形且 $|K|$ 有个度量在 K 上是线性的，则

$$\operatorname{mesh}(\operatorname{sd} K) \leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{mesh} K. \blacksquare$$

这给出了我们已接近的重要结果.

14. 定理 *设 $\mathscr{U}$ 是紧致多面体 X 的开覆盖. 则 X 有比 $\mathscr{U}$ 细的三角剖分.*

证明 设 (K, f) 是 X 的三角剖分. 我们来证明, 存在整数 N, 使得若 $n \geqslant N$, 则 $(\operatorname{sd}^n K, f)$ 是比 $\mathscr{U}$ 细的. 设 $|K|$ 被给出在 K 上线性的度量, 且设 $\varepsilon > 0$ 是开覆盖 $f^{-1}\mathscr{U} = \{f^{-1}U \mid U \in \mathscr{U}\}$ 的关于这度量的 Lebesque 数[这样, 若 $A \subset |K|$ 且 $\operatorname{diam} A \leqslant \varepsilon$, 则 $f(A)$ 包含于 $\mathscr{U}$ 的某元素中]. 这样的数 $\varepsilon > 0$ 存在, 因为 $|K|$ 是紧致的. 设 $m = \dim K$, 并选择 N, 使

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^N \operatorname{mesh} K \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$\left(\text{这样的 } N \text{ 存在, 因为} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n = 0\right)$. 若 $n \geqslant N$, 则由推论 13,

$$\operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

若 v' 是 $\operatorname{sd}^n K$ 的任意顶点, 则

$$\operatorname{diam}(\operatorname{st} v') \leqslant 2 \operatorname{mesh} \operatorname{sd}^n K \leqslant \varepsilon,$$

所以 $f(\operatorname{st} v')$ 包含于 $\mathscr{U}$ 的某元素中, 从而 $(\operatorname{sd}^n K, f)$ 是比 $\mathscr{U}$ 细的 (若 $n \geqslant N$). $\blacksquare$

若 X 不是紧致的, 上述这结果也成立, 更确切说, 若 (K, f) 是多面体 X 的三角剖分, 且 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 则存在 K 的重分 K', 使 (K', f) 是比 $\mathscr{U}$ 细的[4]. 然而, 当 X 为非紧致时, K' 一般来说不能选为 K 的累次重心重分, 因而对此情况的证明比定理 14 的证明更要复杂. 我们只需要已在定理 14 中证明的形式, 因此, 省略了进一步考虑这更一般的情况.

---

[4] 见 J. H. C. Whitehead: Simplicial spaces, nuclei, and m-groups, *Proc. London Math. Soc.*, Vol. 45, 243~327, (1939) 中的定理 35. ——原注

§4 单纯逼近

在单纯复形的空间之间的连续映射可以用某种适当的方式由单纯映射逼近. 本节包含这种逼近的定义、特性, 以及证明了从紧致多面体到任意多面体的映射这种单纯逼近的存在. 最后, 我们应用得到的结果来导出球的某些连通性的性质.

设 K_1 和 K_2 是单纯复形, 且设 $f: |K_1| \to |K_2|$ 是连续的. 一个单纯映射 $\varphi: K_1 \to K_2$ 称作是 f 的一个单纯逼近, 若 $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ 蕴涵 $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ (或等价地, $f(\alpha) \in |s_2|$ 蕴涵 $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$) (对于 $\alpha \in K_1$ 及 $s_2 \in K_2$). 注意若 v 是 K_1 的顶点使 $f(v)$ 是 K_2 的顶点, 则 $|\varphi|(v) = f(v)$. 所以我们有以下的结果:

1. 引理 设 $f: |K_1| \to |K_2|$ 是映射且假设对某子复形 $L_1 \subset K_1$, $f \mid |L_1|$ 由一个单纯映射 $L_1 \to K_2$ 诱导出来. 若 $\varphi: K_1 \to K_2$ 是 f 的单纯逼近, 则 $|\varphi| \mid |L_1| = f \mid |L_1|$. ∎

特别地, 对单纯映射 $\varphi: K_1 \to K_2$ 诱导出来的映射 $|\varphi|: |K_1| \to |K_2|$, 只有一个单纯逼近, 就是 φ 自身. 单纯逼近的所谓逼近, 其涵义之一如下述:

2. 引理 设 $\varphi: K_1 \to K_2$ 是映射 $f: |K_1| \to |K_2|$ 的单纯逼近, 且设 $A \subset |K_1|$ 是 $|K_1|$ 的子集, 在 A 上 $|\varphi|$ 和 f 重合, 则

$$|\varphi| \simeq f \ rel A.$$

证明 从 $|\varphi|$ 到 f 的一个相对于 A 的同伦由等式

$$F(\alpha, t) = tf(\alpha) + (1-t)(|\varphi|(\alpha)) \quad (\alpha \in |K_1|, \ t \in I)$$

所定义. 其右边为定义好了的, 因为若 $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$, 则

$$|\varphi|(\alpha) \in |s_2|,$$

且从而 $F(\alpha, t) \in |s_2|$ (对 $t \in I$). F 的连续性不难验证. 显然, 若 $\alpha \in A$, 则 $F(\alpha, t) = f(\alpha)$ (对所有的 $t \in I$). 所以

$$F: |\varphi| \simeq f \ rel A. \ ∎$$

下述定理给出单纯逼近的一个有用的特征.

3. 定理 从 K_1 到 K_2 的顶点映射 φ 是 $f: |K_1| \to |K_2|$ 的

单纯逼近，当且仅当对每顶点 $v\in K_1$，

$$f(\operatorname{st} v)\subset \operatorname{st}\varphi(v).$$

证明 设 φ 是 f 的单纯逼近. 设 $\alpha\in \operatorname{st} v$，且设 $f(\alpha)\in\langle s_2\rangle$，则 $\alpha(v)\neq 0$ 且 $|\varphi|(\alpha)\in|s_2|$. 因为 φ 是单纯的，故

$$|\varphi|(\alpha)(\varphi(v))\neq 0.$$

所以 $\varphi(v)$ 是 $|s_2|$ 的顶点，且 $f(\alpha)\in \operatorname{st}\varphi(v)$. 因为这对每个 $\alpha\in \operatorname{st} v$ 皆如此，故 $f(\operatorname{st} v)\subset \operatorname{st}\varphi(v)$.

反之，假设 φ 是顶点映射，使 $f(\operatorname{st} v)\subset \operatorname{st}\varphi(v)$（对每个顶点 $v\in K_1$）. 我们来证明 φ 是单纯映射. 若 $\{v_i\}$ 是 K_1 的一个单纯形的顶点，则 $\bigcap \operatorname{st} v_i\neq\emptyset$（由引理 3.1.25）且

$$\emptyset\neq f(\bigcap \operatorname{st} v_i)\subset\bigcap f(\operatorname{st} v_i)\subset\bigcap \operatorname{st}\varphi(v_i).$$

由引理 3.1.25，$\{\varphi(v_i)\}$ 是 K_2 的某单纯形的顶点. 所以 φ 是单纯映射 $K_1\to K_2$.

为了证明 φ 是 f 的单纯逼近，假设 $\alpha\in\langle s_1\rangle$ 且 $f(\alpha)\in\langle s_2\rangle$. 且设 v 是 s_1 的任一顶点. 则 $\alpha\in \operatorname{st} v$，且由题设，$f(\alpha)\in \operatorname{st}\varphi(v)$. 所以 $\varphi(v)$ 是 s_2 的顶点. 这对 s_1 的每个顶点 v 是同样成立的. 因为 φ 是单纯的，故 $|\varphi|(|s_1|)\subset|s_2|$. 从而 $|\varphi|(\alpha)\in|s_2|$，且 φ 是 f 的单纯逼近. ∎

我们也有兴趣研究偶的映射 $f:(|K_1|,|L_1|)\to(|K_2|,|L_2|)$ 的单纯逼近 $\varphi:(K_1,L_1)\to(K_2,L_2)$. 下述推论说明一个映射 $f:(|K_1|,|L_1|)\to(|K_2|,|L_2|)$ 的任一单纯逼近 $K_1\to K_2$ 当被视为偶的映射时自动成为一个单纯逼近.

4. 推论 设 $f:|K_1|\to|K_2|$ 是映射，使 $f(|L_1|)\subset|L_2|$（对 $L_1\subset K_1$ 和 $L_2\subset K_2$）. 且设 $\varphi:K_1\to K_2$ 是 f 的单纯逼近. 则 $\varphi|L_1$ 映 L_1 到 L_2，且为 $f||L_1|$ 的单纯逼近.

证明 由定理 3，只要证明，若 v 是 L_1 的顶点，则 $\varphi(v)$ 是 L_2 的顶点，使

$$f(\operatorname{st} v\cap|L_1|)\subset \operatorname{st}\varphi(v)\cap|L_2|$$

即可. 因 φ 是 f 的单纯逼近，故 $f(\operatorname{st} v)\subset \operatorname{st}\varphi(v)$，且若 v 是 L_1 的顶点，则 $f(v)\in\langle s_2\rangle$（对某 $s_2\in L_2$）[因为，$f(|L_1|)\subset|L_2|$]. 所以

$\varphi(v)$是 L_2 的顶点,且

$$f(\mathrm{st}\, v\cap|L_1|)\subset f(\mathrm{st}\, v)\cap|L_2|\subset\mathrm{st}\,\varphi(v)\cap|L_2|. \qquad \blacksquare$$

从推论 4 得出,映射 $f:(|K_1|, |L_1|)\to(|K_2|, |L_2|)$ 的任意单纯逼近是单纯映射 $\varphi:(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$. 由引理 2 得出了作为偶的映射 $f\simeq|\varphi|$.

5. 推论 映射的单纯逼近的合成,是映射的合成的单纯逼近.

证明 设 $\varphi: K_1\to K_2$ 是 $f: |K_1|\to|K_2|$ 的单纯逼近,且设 $\psi: K_2\to K_3$ 是 $g: |K_2|\to|K_3|$ 的单纯逼近. 则由定理 3, 对顶点 $v\in K_1$,

$$gf(\mathrm{st}\, v)\subset g(\mathrm{st}\,\varphi(v))\subset\mathrm{st}\,\psi\varphi(v),$$

且从而 $\psi\varphi: K_1\to K_3$ 即成为 $gf: |K_1|\to|K_3|$的单纯逼近. $\blacksquare$

定理 3 导致对一映射的单纯逼近的存在性的下述充分必要条件:

6. 定理 映射 $f: |K_1|\to|K_2|$容许有单纯逼近 $K_1\to K_2$, 当且仅当 K_1 是比开覆盖 $\{f^{-1}(\mathrm{st}\, v)\,|\,v$ 是 K_2 的顶点$\}$细的.

证明 由定理 3, f 有单纯逼近, 当且仅当对每个顶点 $v_1\in K_1$, 存在顶点 $v_2\in K_2$, 使 $\mathrm{st}\, v_1\subset f^{-1}(\mathrm{st}\, v_2)$. 这等价于条件: K_1 是比 $\mathscr{U}$ 细[*]. $\blacksquare$

若 K' 是 K 的重分,则对顶点 $v'\in K'$ 和 $v\in K$

$$v'\in\mathrm{st}_K\, v \Leftrightarrow \mathrm{st}_{K'}\, v'\subset\mathrm{st}_K\, v.$$

综合此事实与定理 3 建立了以下推论:

7. 推论 设 K' 是 K 的重分, 则从 K' 到 K 的顶点映射 φ 是恒同映射$|K'|\subset|K|$的单纯逼近, 当且仅当 $v'\in\mathrm{st}\,\varphi(v')$(对每个顶点 $v'\in K'$). $\blacksquare$

特别地, 若 K' 是 K 的重分, 则存在恒同映射$|K'|\subset|K|$的单纯逼近 $K'\to K$. 综合定理 6 和 3.3.14 以及推论 4, 得到下述单纯逼近定理.

8. 定理 设(K_1, L_1)是有限单纯偶, 且设 $f:(|K_1|, |L_1|)$

---

[*] $\mathscr{U}$ 指定理中的 K_1 的开覆盖. ——译注

$\to(|K_2|, |L_2|)$是映射. 则存在整数 N, 使若 $n\geqslant N$, 则有 f 的单纯逼近 $(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)\to(K_2, L_2)$. ∎

如同§3.3最后所考察的, 定理3.3.14对任意多面体 X 也有效. 所以, 若 K_1 是任意的, 且 $f: |K_1|\to|K_2|$ 是映射, 则存在 K_1 的重分 K_1' 和 $f: |K_1'|\to|K_2|$ 的单纯逼近 $K_1'\to K_2$. 然而, 若 K_1 不是有限的, K_1' 一般来说不能取作 K_1 的累次重心重分.

9. 例 若 $\dot{s}$ 是由一个2维单纯形 s 的所有真面组成的复形, 则 $|\dot{s}|$ 同胚于 S^1, 且从而 $[|\dot{s}|; |\dot{s}|]$ 是无限集. 因为 $\dot{s}$ 是有限复形, 则对任意 n 仅有有限个单纯映射 $\mathrm{sd}^n\dot{s}\to\dot{s}$. 所以对任意 n, 存在映射 $|\dot{s}|\to|\dot{s}|$ 没有单纯逼近 $\mathrm{sd}^n\dot{s}\to\dot{s}$.

10. 例 设 $\dot{s}$ 如同例9, 且设其顶点为 v_0、v_1 和 v_2. 定义 $f: |\dot{s}|\to|\dot{s}|$ 是映射, 在 $\mathrm{sd}\,\dot{s}$ 上是线性的, 使

$$
\begin{aligned}
f(v_0)&=b\{v_0, v_1\},\\
f(v_1)&=b\{v_1, v_2\},\\
f(v_2)&=b\{v_2, v_0\},\\
f(b\{v_0, v_1\})&=v_1,\\
f(b\{v_1, v_2\})&=v_2,\\
f(b\{v_2, v_0\})&=v_0.
\end{aligned}
$$

则 $f\simeq|1_{\dot{s}}|$, 但对 f 无单纯逼近 $\dot{s}\to\dot{s}$. 对 f 的单纯逼近 $\varphi: \mathrm{sd}\,\dot{s}\to\dot{s}$ 恰有6个[φ 在 $b\{v_0, v_1\}, b\{v_1, v_2\}, b\{v_2, v_0\}$ 上唯一, 且 $\varphi(v_0)=v_0$ 或 v_1, $\varphi(v_1)=v_1$ 或 v_2, $\varphi(v_2)=v_2$ 或 v_0].

作为单纯逼近技术的一个应用, 我们导出下述有用的结果:

11. 定理 对于 $n\geqslant 1$, S^n 是 $(n-1)$ 连通的.

证明 由定理1.6.7, 只要证明, 若 $m<n$ 时, 任意映射 $S^m\to S^n$ 为零伦的即可. 设 s_1 是 $m+1$ 维单纯形及 s_2 是 $n+1$ 维单纯形. 则 S^m 和 S^n 分别同胚于 $|\dot{s}_1|$ 和 $|\dot{s}_2|$. 由定理8和引理2, 只要证明, 若 $\varphi: \mathrm{sd}^r\dot{s}_1\to\dot{s}_2$ 是任意单纯映射, 则 $|\varphi|$ 零伦即可. 因为 $\dim(\mathrm{sd}^r\dot{s}_1)=m<n$, 故 φ 映 $\mathrm{sd}^r\dot{s}_1$ 到 $\dot{s}_2$ 的 m 维骨架. 所以有某个 $\alpha\in|\dot{s}_2|$, 使

$$|\varphi|(|\mathrm{sd}^r\dot{s}_1|)\subset|\dot{s}_2|-\alpha.$$

因为$|\bar{s}_2|-c$同胚于S^n减去一点，故它同胚于$\mathbf{R}^n$，是可缩的．所以$|\varphi|$为零伦的．∎

特别地，有下述结果：

12．推论 对$n>1$，S^n单连通．∎

因为S^n是局部道路连通的，故推论12和升腾定理蕴涵任意连续映射$f: S^n\to S^1$可分解出覆叠映射$ex: \mathbf{R}\to S^1$为因子．因$\mathbf{R}$是可缩的，这蕴涵以下推论．

13．推论 对$n>1$，任意连续映射$S^n\to S^1$是零伦的．∎

§5 邻 接 类

上节阐明了，在单纯复形的空间之间的任意连续映射在定义域复形的充分细的重分上可定义单纯逼近．一般来说，对一给定映射，其单纯逼近不是唯一的．本节中我们就来探讨这个不唯一性．

我们将定义一个类似同伦的概念，称为*邻接*，是在单纯偶和单纯映射的范畴中的．同一个连续映射的不同的单纯逼近将被证明是邻接的．本节的主要结论是，在(从一个有限单纯复形的空间到一随意的单纯复形的空间的)连续映射的同伦类集合和单纯映射的邻接类的某序列的顺向极限之间存在着双映．

设(K_1, L_1)和(K_2, L_2)是单纯偶．两个单纯映射

$$\varphi, \varphi': (K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$$

是*邻接的*，若给定一单纯形$s\in K_1$(或$s\in L_1$)，则$\varphi(s)\cup\varphi'(s)$是$K_2$的(或$L_2$的)一单纯形．显然，这在单纯映射$(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$的集合中是自反的和对称的关系．但一般不是传递的．然而，在这个单纯映射的集合中，存在一个等价关系，记以$\varphi\sim\varphi'$，如下定义：$\varphi\sim\varphi'$，当且仅当存在有限序列$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$使$\varphi_0=\varphi$，$\varphi_n=\varphi'$，且使$\varphi_{i-1}$和$\varphi_i$是邻接的(对$i=1, 2, \cdots, n$)．相应的等价类称为*邻接类*，从$(K_1, L_1)$到$(K_2, L_2)$的单纯映射的邻接类集合记作$[K_1, L_1; K_2, L_2]$．若$\varphi: (K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$是

单纯映射，则其邻接类记为$[\varphi]$.

我们将会看到，邻接类是同伦类的在代数上的类似概念. 我们将从证明邻接类可合成开始研究.

1. 引理 *邻接的单纯映射的合成是邻接的.*

证明 设 φ, φ': $(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$ 是邻接的，且

$$\psi, \psi'\colon (K_2, L_2)\to(K_3, L_3)$$

也是邻接的. 若 s 是 K_1(或 L_1)的单纯形，则 $\varphi(s)\cup\varphi'(s)$ 是 K_2 (或 L_2)的单纯形. 所以

$$\psi(\varphi(s)\cup\varphi'(s))\cup\psi'(\varphi(s)\cup\varphi'(s))$$

是 K_3(或 L_3)的单纯形. 这蕴涵子集 $\psi\varphi(s)\cup\psi'\varphi'(s)$ 是 K_3(或 L_3)的单纯形，且从而 $\psi\varphi, \psi'\varphi'$: $(K_1, L_1)\to(K_3, L_3)$ 是邻接的. ∎

容易从引理1推出，若 $\varphi\sim\varphi'$ 和 $\psi\sim\psi'$，则有 $\psi\varphi\sim\psi\varphi'\sim\psi'\varphi'$. 所以存在邻接类的完全确定的合成

$$[\psi]\circ[\varphi]=[\psi\circ\varphi],$$

对 $(K_1, L_1) \xrightarrow{\varphi} (K_2, L_2) \xrightarrow{\psi} (K_3, L_3)$. 这样，存在邻接范畴，其对象为单纯偶，其态为单纯映射的邻接类. 存在邻接范畴的满子范畴由偶$(K, \emptyset)$，或点标单纯复形所决定.

2. 引理 *在一子复形上重合的邻接的单纯映射确定了相对于该子复形的空间的同伦的连续映射.*

证明 设 φ, φ': $(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$ 是邻接的，且在 $L\subset K$ 上重合. 定义从 φ 到 $|\varphi'|$ 的相对于 $|L|$ 的同伦 F: $(|K_1|\times I, |L_1|\times I)\to(|K_2|, |L_2|)$ 使

$$F(\alpha, t)=(1-t)(|\varphi|(\alpha))+t(|\varphi'|(\alpha))$$

$$(\alpha\in|K_1|,\ t\in I).\ ∎$$

因为同伦是等价关系，故若 $\varphi\sim\varphi'$，则 $|\varphi|\simeq|\varphi'|$. 所以有以下结果:

3. 推论 *存在从单纯偶的邻接范畴到拓扑偶的同伦范畴的协变函子 变(K, L)为$(|K|, |L|)$，$[\varphi]$为同伦类$[|\varphi|]$.* ∎

下一个结果考虑同一个连续映射的不同的单纯逼近.

4. 引理 同一连续映射的两个单纯逼近$(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$是邻接的.

证明 设φ, φ': $(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$是f: $(|K_1|, |L_1|)\to(|K_2|, |L_2|)$的两个单纯逼近, 且设$\{v_i\}$是$K_1$的一单纯形. 则$\bigcap \operatorname{st} v_i\neq\emptyset$, 且由定理3.4.3,

$$\emptyset\neq f(\bigcap \operatorname{st} v_i)\subset\bigcap f(\operatorname{st} v_i)\subset\bigcap(\operatorname{st}\varphi(v_i)\cap\operatorname{st}\varphi'(v_i)).$$

所以$\{\varphi(v_i)\}\cup\{\varphi'(v_i)\}$是$K_2$的单纯形. 若$\{v_i\}$是$L_1$的单纯形, 同样的论证说明$\{\varphi(v_i)\}\cup\{\varphi'(v_i)\}$是$L_2$的单纯形. 所以$\varphi$和$\varphi'$是邻接的. ∎

因为重分对于得到任意映射的单纯逼近是必要的, 故我们也期望重分造成邻接类对应于同伦类. 下面一个例子将显示同伦和邻接类的相互关系.

5. 例 设s是2维单纯形,顶点为v_0、v_1、v_2, 且设$K_1=K_2=\dot{s}$. 从K_1到K_2的任意顶点映射是单纯映射. 所以恰存在27个单纯映射$K_1\to K_2$. 在这27个中, 有21个映K_1入K_2的真子复形,这些构成了一个邻接类. 其余6个,每个是其邻接类的仅有的元素,顶点的3个偶排列确定了同伦的连续映射对应于群

$$[|K_1|; |K_2|]\approx[S^1; S^1]\approx\mathbf{Z}$$

的一个生成元; 而3个奇排列对应这群的另一个生成元. 所以$[K_1; K_2]$由7个元素组成,而

$$[K_1; K_2]\to[|K_1|; |K_2|]$$

的象由3个元素组成.

此例说明确定了同伦的连续映射的单纯逼近不必在同一个邻接类之中. 下一个结果则说明一有限单纯复形可重分到使从它到另一个复形的同伦的单纯映射可由在此重分上的同一个邻接类的来单纯逼近; 这是类似于单纯逼近定理的结果.

6. 定理 设f, f': $(|K_1|, |L_1|)\to(|K_2|, |L_2|)$是同伦的, 其中$K_1$是有限的. 则存在$N$, 使得$f$和$f'$分别有单纯逼近

$$\varphi, \varphi': (\operatorname{sd}^N K_1, \operatorname{sd}^N L_1)\to(K_2, L_2)$$

在同一邻接类中.

证明 设 $F: (|K_1|\times I, |L_1|\times I)\to(|K_2|, |L_2|)$ 是从 f 到 f' 的同伦. 因为 $|K_1|$ 是紧致的, 故存在 I 的点列 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ 使对 $\alpha\in|K_1|$ 和 $i=1, 2, \cdots, n$, 有顶点 $v\in K_2$, 使 $F(\alpha, t_{i-1})$ 和 $F(\alpha, t_i)$ 属于 $\mathrm{st}\, v$. 设 $f_i: (|K_1|, |L_1|)\to(|K_2|, |L_2|)$ 由 $f_i(\alpha)=F(\alpha, t_i)$ 定义, 则 $f=f_0$, $f'=f_n$, 且对 $i=1, \cdots, n$ 集合

$$\mathscr{U}_i=\{f_i^{-1}(\mathrm{st}\, v)\cap f_{i-1}^{-1}(\mathrm{st}\, v)\,|\, v\in K_2\}$$

是 $|K_1|$ 的开覆盖. 设 N 选得足够大, 使 $\mathrm{sd}^N K_1$ 比 $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \cdots, \mathscr{U}_n$ 都细(由定理 3.3.14, 这是可能的). 对 $i=1, 2, \cdots, n$, 设 φ_i 是从 $\mathrm{sd}^N K_1$ 到 K_2 的顶点映射, 使

$$f_i(\mathrm{st}\, v)\cup f_{i-1}(\mathrm{st}\, v)\subset \mathrm{st}\,\varphi_i(v),$$

对每个顶点 $v\in K_1$(这样的顶点映射 φ_i 是存在的, 因为 $\mathrm{sd}^N K_1$ 比 $\mathscr{U}_i$ 细). 由定理 3.4.3,

$$\varphi_i: (\mathrm{sd}^N K_1, \mathrm{sd}^N L_1)\to(K_2, L_2)$$

是 φ_i 和 f_{i-1} 的单纯逼近. 因为 φ_i 和 φ_{i+1} 是 f_i 的单纯逼近, 故由引理 4, φ_i 和 φ_{i+1} 对 $i=1, 2, \cdots, n-1$ 是邻接的. 所以 $\varphi_1\sim\varphi_n$, 且 φ_1 是 $f_0=f$ 的单纯逼近, φ_n 是 $f_n=f'$ 的单纯逼近. ∎

与单纯逼近定理不同的是, 若 K_1 不是有限单纯复形, 上一个结果肯定不对, 亦即, 给定同伦的映射 $f, f': |K_1|\to|K_2|$, 不见得有 K_1 的重分 K_1', 使 f 和 f' 有在同一个邻接类中的单纯逼近 $K_1'\to K_2'$.

7. 例 设 $K_1=K_2$ 等于例 3.1.8 的单纯复形, 其空间同胚于 $\mathbf{R}$. 设 $\varphi: K_1\to K_2$ 是恒同单纯映射, $\varphi': K_1\to K_2$ 是常值单纯映射, 变 K_1 的每个顶点到 K_2 的顶点 0. 因为 $\mathbf{R}$ 是可缩的, 故 $|\varphi|\simeq|\varphi'|$. 然而, 若 K_1' 是 K_1 的任意重分, $|\varphi|$ 的单纯逼近 $\psi: K_1'\to K_2$ 必定是到 K_2 顶点的满映, 而 $|\varphi'|$ 的单纯逼近 $\psi': K_1'\to K_2$ 必定是到 0 的常值映射. 因为邻接映射 $K_1'\to K_2$ 或者皆映在有限集上, 或者都映在无限集上, 故 ψ 和 ψ' 不在同一个邻接类中.

我们证明若 K_1 是有限的, 则映射同伦类的集合 $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$ 是邻接类集合 $[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]$ 的顺向

极限．注意，恒同映射$(|\mathrm{sd}\,K_1|, |\mathrm{sd}\,L_1|)\subset(|K_1|, |L_1|)$的单纯逼近$(\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1)\to(K_1, L_1)$存在，这是由于推论 3.4.7；且任意两个是邻接的，此依据引理 4．因为邻接的单纯映射的合成是邻接的，故由引理 1，有完全确定的映射

$$\mathrm{sd}\colon [K_1, L_1; K_2, L_2]\to[\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1; K_2, L_2],$$

由

$$\mathrm{sd}[\varphi]=[\varphi\lambda]$$

所定义，其中$\lambda\colon(\mathrm{sd}\,K_1, \mathrm{sd}\,L_1)\to(K_1, L_1)$是恒同$(|\mathrm{sd}\,K_1|, |\mathrm{sd}\,L_1|)\subset(|K_1|, |L_1|)$的任一单纯逼近，且$\varphi\colon(K_1, L_1)\to(K_2, L_2)$是任意的一单纯映射．重复迭代得到叙列

$$\cdots\longrightarrow[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{sd}}[\mathrm{sd}^{n+1} K_1, \mathrm{sd}^{n+1} L_1; K_2, L_2]\to\cdots,$$

左端从$[K_1, L_1; K_2, L_2]$开始，右边则无限伸展，其顺向极限$\lim_{\to}\{[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\}$是两个变元的函子，在$(K_1, L_1)$反变，在$(K_2, L_2)$协变．对有限的$K_1$，此函子自然等价于函子$[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$．

8 定理 若K_1是有限单纯复形，则存在自然等价

$$\lim_{\to}\{[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\}$$
$$\approx[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|].$$

证明 从顺向极限到$[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$的一个函数由以下的函数叙列组成：

$$f_n\colon [\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\to[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$$

（对$n\geqslant0$），使$f_n=f_{n+1}\circ\mathrm{sd}$（对$n\geqslant0$）．这样的叙列$f_n$由

$$f_n[\varphi]=[|\varphi|]$$

定义，对$\varphi\colon(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)\to(K_2, L_2)$，因为，若

$$\lambda_n\colon(\mathrm{sd}^{n+1} K_1, \mathrm{sd}^{n+1} L_1)\to(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)$$

是恒同映射

$$(|\mathrm{sd}^{n+1} K_1|, |\mathrm{sd}^{n+1} L_1|)\subset(|\mathrm{sd}^n K_1|, |\mathrm{sd}^n L_1|)$$

的单纯逼近，则依引理 3.4.2 得$|\lambda_n|\simeq1$，且

$$f_{n+1}\,\mathrm{sd}[\varphi]=[|\varphi\lambda_n|]=[|\varphi|]=f_n[\varphi].$$

叙列$\{f_n\}$定义了自然变换

$$f: \lim_{\to}\{[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]\}$$
$$\to [|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|].$$

我们来证明f是双映.

易由单纯逼近定理得出, $\{f_n\}$满足引言中的定理1.3的(a); 因为, 若$g: (|K_1|, |L_1|)\to(|K_2|, |L_2|)$是映射, 且

$$\varphi: (\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)\to(K_2, L_2)$$

是g的单纯逼近, 则$|\varphi|\simeq g$, 且

$$f_n[\varphi]=[|\varphi|]=[g].$$

为了证明$\{f_n\}$满足引言的定理1.3的(b), 假设

$$\varphi, \varphi': (\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)\to(K_2, L_2)$$

使$|\varphi|\simeq|\varphi'|$. 由定理6, 存在$m\geqslant n$, 使$|\varphi|$和$|\varphi'|$有单纯逼近

$$\psi, \psi': (\mathrm{sd}^m K_1, \mathrm{sd}^m L_1)\to(K_2, L_2)$$

在同一邻接类中. 设

$$\lambda_{m,n}: (\mathrm{sd}^m K_1, \mathrm{sd}^m L_1)\to(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)$$

是合成$\lambda_{m,n}=\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{m-1}$. 则$\lambda_{m,n}$是恒同映射的单纯逼近, 且因为$\varphi$是$|\varphi|$的单纯逼近, 故$\varphi\lambda_{m,n}$也是$|\varphi|$的单纯逼近, 这根据的是推论3.4.5. 由引理4, $\varphi\lambda_{m,n}$邻接于ψ. 类似地, $\varphi'\lambda_{m,n}$邻接于ψ'. 因ψ和ψ'是在同一邻接类中, 从而$\varphi\lambda_{m,n}$和$\varphi'\lambda_{m,n}$也在同一邻接类中. 这意味着$\mathrm{sd}^{m-n}[\varphi]=\mathrm{sd}^{m-n}[\varphi']$在$[\mathrm{sd}^m K_1, \mathrm{sd}^m L_1; K_2, L_2]$中. ▌

对于有限的K_1, 这上一个结果提供了集合$[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$的代数描述. 作为应用, 注意到若$K_2$是可数的复形, 则仅有可数个单纯映射$(\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1)\to(K_2, L_2)$ (对$n\geqslant0$). 所以$[\mathrm{sd}^n K_1, \mathrm{sd}^n L_1; K_2, L_2]$是可数的(对$n\geqslant0$). 因为可数集的叙列的顺向极限是可数的, 故得到以下结果:

9. 推论 设(X, A)和(Y, B)是多面体偶, 其中X紧致及Y是可数复形空间. 则$[X, A; Y, B]$是可数集. ▌

§6 棱道广群

上节中说明了，对有限的 K_1，$[|K_1|; |K_2|]$ 可被描述为一个极限，其中 K_1 被重分但 K_2 不必。特别是，对任意单纯复形 K，K 的从 v_0 到 v_1 的道路类集合由 K 的单纯构造所决定。本节中将揭示这一点，将定义空间的基本广群在单纯情况下类似的东西。下节中将以生成元和关系的语言来显示多面体的基本群。

单纯复形K的一个棱是顶点的有序偶(v, v')，它们同属于 K 的某个单纯形。第一个顶点 v 称为这个棱的始点，第二个顶点 v' 称为这个棱的终点。K 的一个棱道 ζ 是 K 的棱的有限非空序列 $e_1e_2\cdots e_r$ 使 $\operatorname{end} e_i=\operatorname{orig} e_{i+1}$*)(对 $i=1, \cdots, r-1$)。我们定义

$$\operatorname{orig}\zeta=\operatorname{orig}e_1 \quad 和 \quad \operatorname{end}\zeta=\operatorname{end}e_r.$$

在 $v_0\in K$ 的一个闭棱道是一个棱道ζ使 $\operatorname{orig}\zeta=v_0=\operatorname{end}\zeta$。若 ζ_1 和 ζ_2 是 K 的棱道使 $\operatorname{end}\zeta_1=\operatorname{orig}\zeta_2$，我们定义积棱道 $\zeta_1\zeta_2$ 为一个棱道，由 ζ_1 的棱叙列后边接上 ζ_2 的棱叙列而形成。于是

$$\operatorname{orig}\zeta_1\zeta_2=\operatorname{orig}\zeta_1,\ \operatorname{end}\zeta_1\zeta_2=\operatorname{end}\zeta_2.$$

显然，若 $\qquad \operatorname{end}\zeta_1=\operatorname{orig}\zeta_2,\ \operatorname{end}\zeta_2=\operatorname{orig}\zeta_3,$

则 $$\zeta_1(\zeta_2\zeta_3)=(\zeta_1\zeta_2)\zeta_3.$$

这样，棱道的积满足结合律；然而，对于积没有左或右单位元素。为了得到范畴(正如在拓扑空间中为道路所作的那样)，必须定义 K 的棱道集合中的等价关系。

K 中两个棱道 ζ 和 ζ' 是单纯等价的，若存在 K 的顶点 v、v' 和 v'' 属于 K 的某单纯形，使无序偶 $\{\zeta, \zeta'\}$ 等于下列之一：

无序偶 $\{(v, v''), (v, v')(v', v'')\}$；

无序偶 $\{\zeta_1(v, v''), \zeta_1(v, v')(v', v'')\}$ 对 K 中某棱道 ζ_1 使 $\operatorname{end}\zeta_1=v$；

无序偶 $\{(v, v'')\zeta_2, (v, v')(v', v'')\zeta_2\}$ 对 K 中某棱道 ζ_2 使 $\operatorname{orig}\zeta_2=v''$；

---

*) $\operatorname{orig} e$ 和 $\operatorname{end} e$ 分别记 e 的始点和终点。——译注

无序偶 $\{\zeta_1(v, v'')\zeta_2, \zeta_1(v, v')(v', v'')\zeta_2\}$ 对 K 中某棱道 ζ_1 和 ζ_2，使 $\text{end}\,\zeta_1=v$ 及 $\text{orig}\,\zeta_2=v''$.

两个棱道 ζ 和 ζ' 称为等价的，记 $\zeta\sim\zeta'$，若存在有限的棱道叙列 $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 使 $\zeta=\zeta_0$ 及 $\zeta'=\zeta_n$，且 ζ_{i-1} 和 ζ_i 是单纯等价的（对 $i=1, \cdots, n$）. 这是个等价关系，且易验证下列命题:

1. $\zeta\sim\zeta'$ 蕴涵 ζ 和 ζ' 有相同的始点和相同的终点. ▌

2. $\zeta_1\sim\zeta_1'$, $\zeta_2\sim\zeta_2'$, 且 $\text{end}\,\zeta_1=\text{orig}\,\zeta_2$ 蕴涵 $\zeta_1\zeta_2\sim\zeta_1'\zeta_2'$. ▌

3. 若 $\text{orig}\,\zeta=v_1$ 及 $\text{end}\,\zeta=v_2$，则 $(v_1, v_1)\zeta\sim\zeta\sim\zeta(v_2, v_2)$. ▌

若 ζ 是一个棱道，$[\zeta]$ 记其等价类. 由命题 1 推出，$\text{orig}[\zeta]$ 和 $\text{end}[\zeta]$ 是完全确定的（此由 $\text{orig}[\zeta]=\text{orig}\,\zeta$ 和 $\text{end}[\zeta]=\text{end}\,\zeta$）. 由命题 2 有完全确定的合成 $[\zeta_1]\circ[\zeta_2]=[\zeta_1\zeta_2]$，若

$$\text{end}\,\zeta_1=\text{orig}\,\zeta_2.$$

则有类似于定理 1.7.7 的单纯情况的定理.

4. **定理** 有一个范畴 $\mathscr{E}(K)$，其对象为 K 的顶点，其从 v_1 到 v_0 的态为等价类 $[\zeta]$ 使 $\text{orig}[\zeta]=v_0$ 及 $\text{end}[\zeta]=v_1$，且其合成为 $[\zeta_1]\circ[\zeta_2]$.

证明 单位态由命题 3 给出其存在性；合成的结合律则为棱道积的结合律的推论. ▌

我们现在来说明 $\mathscr{E}(K)$ 是个广群. 若 $e=(v, v')$ 是 K 的棱，定义 $e^{-1}=(v', v)$，且若 $\zeta=e_1\cdots e_r$ 是 K 中的棱道，定义

$$\zeta^{-1}=e_r^{-1}\cdots e_1^{-1}.$$

容易核实下列命题:

5. $(\zeta^{-1})^{-1}=\zeta$. ▌

6. $\text{orig}\,\zeta^{-1}=\text{end}\,\zeta$ 及 $\text{end}\,\zeta^{-1}=\text{orig}\,\zeta$. ▌

7. $\zeta_1\sim\zeta_2$ 蕴涵 $\zeta_1^{-1}\sim\zeta_2^{-1}$. ▌

8. 若 $\text{orig}\,\zeta=v_1$ 及 $\text{end}\,\zeta=v_2$，则 $\zeta\zeta^{-1}\sim(v_1, v_1)$ 且 $\zeta^{-1}\zeta\sim(v_2, v_2)$. ▌

于是得出，在 $\mathscr{E}(K)$ 中，$[\zeta^{-1}]=[\zeta]^{-1}$，且从而 $\mathscr{E}(K)$ 是个广群. 此广群称为 K 的棱道广群. 若 v_0 是 K 的顶点，则在 $\mathscr{E}(K)$ 的始点和终点皆为 v_0 的元素的集合中，运算 $[\zeta]\circ[\zeta']$ 使之成为一

个群，记作 $E(K, v_0)$，称为 K 的以 v_0 为基顶点的棱道群.

为对比 $\mathscr{E}(K)$ [和 $E(K, v_0)$] 与 $\mathscr{P}(|K|)$ [和 $\pi(|K|, v_0)$]，对 $r\geqslant 1$ 记 I_r 为 r 等分 I 所得的重分，亦即，$\dot{I}_r$ 是单纯复形

$$I_r=\left\{\left\{\frac{i}{r}\right\}\Big|0\leqslant i\leqslant r\right\}\cup\left\{\left\{\frac{i-1}{r}, \frac{i}{r}\right\}\Big|1\leqslant i\leqslant r\right\}.$$

给定 K 中的 r 个棱的棱道 $\zeta=e_1\cdots e_r$，设 φ_ζ: $I_r\to K$ 是单纯映射，由

$$\varphi_\zeta\left(\frac{i}{r}\right)=\begin{cases}\operatorname{orig} e_{i+1} & (0\leqslant i\leqslant r-1)\\ \operatorname{end} e_i & (1\leqslant i\leqslant r)\end{cases}$$

给出. 则 $|\varphi_\zeta|$: $I\to|K|$ 是 $|K|$ 中的道路，且易见下列命题成立.

9. $\operatorname{orig}|\varphi_\zeta|=\operatorname{orig}\zeta$ 且 $\operatorname{end}|\varphi_\zeta|=\operatorname{end}\zeta$. ▌

10 $\zeta\sim\zeta'$ 蕴涵 $|\varphi_\zeta|\sim|\varphi_{\zeta'}|\operatorname{rel}\dot{I}$. ▌

11. 若 $\operatorname{end}\zeta_1=\operatorname{orig}\zeta_2$，则 $|\varphi_{\zeta_1\zeta_2}|\simeq|\varphi_{\zeta_1}|*|\varphi_{\zeta_2}|\operatorname{rel}\dot{I}$. ▌

于是可得出，存在从 $\mathscr{E}(K)$ 到 $\mathscr{P}(|K|)$ 的自然变换 ρ，变 $v\in K$ 为点 $v\in|K|$，变 $\mathscr{E}(K)$ 中的态 $[\zeta]$ 为 $\mathscr{P}(|K|)$ 中的态 $[|\varphi_\zeta|]$[*]. 下面证明对于顶点 v_0、$v_1\in K$，ρ 为双映：

$$\rho: \hom_{\mathscr{E}}(v_1, v_0)\approx\hom_{\mathscr{P}}(v_1, v_0).$$

这可以由定理 3.5.8 得到，但也可以直接证明(且并不比基于定理 3.5.8 的证明更长).

12. **引理** 对任意 v_0、$v_1\in K$，函数

$$\rho: \hom_{\mathscr{E}}(v_1, v_0)\to\hom_{\mathscr{P}}(v_1, v_0)$$

是满映.

证明 给定从 v_0 到 v_1 的道路 ω: $I\to|K|$，因为 $I=|I_1|$，故由定理 3.4.8 得出，有单纯映射

$$\varphi: \operatorname{sd}^n I_1\to K$$

是 ω 的单纯逼近. 因 $\operatorname{sd}^n I_1=I_{2^n}$，故存在棱道 $\zeta=e_1\cdots e_{2^n}$，由

$$e_i=\left(\varphi\left(\frac{i-1}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{i}{2^n}\right)\right)$$

定义，使 $\varphi=\varphi_\zeta$. 因为 $\varphi(0)=\omega(0)$ 且 $\varphi(1)=\omega(1)$，故从引理 3.4.2 得出 $|\varphi|\simeq\omega\operatorname{rel}\dot{I}$. 所以 $[\omega]=[|\varphi|]=[|\varphi_\zeta|]=\rho[\zeta]$. ▌

---

[*] ρ 不是自然变换，而是协变函子. ——译注

在证明 ρ 是单映之前需要一些预备引理.

13 引理　对任意单纯形 s, 在 $\bar{s}$ 中具有相同始点和相同终点的两个棱道是等价的.

证明　只要证明若 ζ 是 $\bar{s}$ 的任意棱道, 使 $\operatorname{orig}\zeta=v$ 和 $\operatorname{end}\zeta=v'$, 则 ζ 等价于由单个棱 (v, v') 组成的棱道即可. 这由对 ζ 的棱道数归纳证明而得出. ▮

14. 引理　设 ζ 和 ζ' 是 K 中的棱道, 各有 r 个棱, 使 $\varphi_\zeta, \varphi_{\zeta'}: I_r\to K$ 为邻接的. 则 $\zeta\sim\zeta'$.

证明　设 $\zeta=e_1\cdots e_r$, 其中 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$, 且设 $\zeta'=e'_1\cdots e'_r$, 其中 $e'_i=(v'_{i-1}, v'_i)$. 对 $0\leqslant i\leqslant r$ 设 $\bar{e}_i=(v_i, v'_i)$(这是 K 的棱道, 因为 φ_ζ 和 $\varphi_{\zeta'}$ 是邻接的). 从等价的定义得

$$\zeta\sim e_1\bar{e}_1\bar{e}_1^{-1}e_2\bar{e}_2\bar{e}_2^{-1}\cdots\bar{e}_{r-1}^{-1}e_r.$$

因为 φ_ζ 和 $\varphi_{\zeta'}$ 是邻接的, 则对每 $1\leqslant i\leqslant r$ 存在 K 的某单纯形 s_i 使 e_i, e'_i, $\bar{e}_{i-1}$ 和 $\bar{e}_i$ 全是 s_i 的棱. 由引理 13, $e_1\bar{e}_1\sim e'_1$ 和 $\bar{e}_{i-1}^{-1}e_i\bar{e}_i\sim e'_i$ (对 $0<i<r-1$), 且 $\bar{e}_{r-1}^{-1}e_r\sim e'_r$. 所以

$$e_1\bar{e}_1\bar{e}_1^{-1}e_2\bar{e}_2\bar{e}_2^{-1}\cdots\bar{e}_{r-1}^{-1}e_r\sim e'_1e'_2\cdots e'_r=\zeta'.\ ▮$$

15. 引理　设 $\zeta=e_1\cdots e_r$ 是 K 的棱道, 且设 $\lambda: I_{2r}\to I_r$ 是恒同映射 $|I_{2r}|\subset|I_r|$ 的单纯逼近. 则 $\varphi_\zeta\lambda=\varphi_{\zeta'}: I_{2r}\to K$ 对某 $\zeta'=e'_1\cdots e'_{2r}$, 且 $\zeta\sim\zeta'$.

证明　设 $e_i=(v_{i-1}, v_i)$ (对 $0<i\leqslant r$). 则

$$e'_{2i-1}e'_{2i}=(v_{i-1}, \bar{v}_i)(\bar{v}_i, v_i)$$

(对某顶点 $\bar{v}_i$), 它等于 v_{i-1} 或 v_i 中的一个. 由引理 13, $e'_{2i-1}e'_{2i}\sim e_i$ 且 $\zeta'\sim\zeta$. ▮

我们现已准备好关于棱道广群的主要结果.

16. 定理　对顶点 v_0、$v_1\in K$, 函数

$$\rho: \hom_\varepsilon(v_1, v_0)\to\hom_\pi(v_1, v_0)$$

是双映.

证明　由于有了引理 12, 只剩下证明 ρ 是单映. 设 ζ 和 ζ' 是从 v_0 到 v_1 的棱道, 使 $|\varphi_\zeta|\sim|\varphi_{\zeta'}|\ \mathrm{rel}\ \dot{I}$. 将平凡棱 (v_1, v_1) 加到 ζ 或 ζ' 的终点, 可用等价的棱道代替 ζ 和 ζ', 使之具有相同的棱

数. 从而不失一般性可设 ζ 和 ζ' 都有 r 个棱. 则 $\varphi_\zeta, \varphi_{\zeta'}: I_r \to K$ 是使 $|\varphi_\zeta| \simeq |\varphi_{\zeta'}| \operatorname{rel} \dot{I}$ 的. 由定理 3.5.6, 存在 m 使若 $\lambda: \operatorname{sd}^m I_r \to I_r$ 是恒同映射的单纯逼近, 则 $\varphi_\zeta\lambda$ 和 $\varphi_{\zeta'}\lambda$ 是在同一邻接类中. 现在 $\varphi_\zeta\lambda = \varphi_{\zeta_1}$ 和 $\varphi_{\zeta'}\lambda = \varphi_{\zeta'_1}$(对于 K 的棱道 ζ_1 和 ζ'_1). 由引理 15 (及对 n 归纳), $\zeta \sim \zeta_1$ 和 $\zeta' \sim \zeta'_1$. 从引理 14 得出 $\zeta \sim \zeta'_1$. 所以 $\zeta \sim \zeta'$. ▌

若 $\varphi: K_1 \to K_2$ 是单纯映射, 则存在协变函子 $\varphi_\#: \mathscr{E}(K_1) \to \mathscr{E}(K_2)$, 由

$$\varphi_\#[\zeta] = [\varphi(\zeta)]$$

定义, 其中, 若

$$\zeta = (v_0, v_1)(v_1, v_2)\cdots(v_{r-1}, v_r),$$

则

$$\varphi(\zeta) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1))(\varphi(v_1), \varphi(v_2))\cdots(\varphi(v_{r-1}), \varphi(v_r)).$$

验证在方形

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}(K_1) & \xrightarrow{\varphi_\#} & \mathscr{E}(K_2) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \mathscr{P}(|K_1|) & \xrightarrow{|\varphi|_\#} & \mathscr{P}(|K_2|) \end{array}$$

内的交换性是不难的. 所以有以下结果:

17. 推论 *在以 v_0 为基顶点的点标单纯复形 K 的范畴上, ρ 是协变函子 $E(K, v_0)$ 到协变函子 $\pi(|K|, v_0)$ 的自然变换.* ▌

注意, $\mathscr{E}(K)$ 由 K 的 2 维骨架所决定; 亦即, K 的棱道决定于 K 中处于相同单纯形之中的顶点偶, 且棱道之间的等价决定于处在同一单纯形的三顶点组. 从而 $\mathscr{E}(K^2) \approx \mathscr{E}(K)$[*].

---

[*] 这一大段叙述与本书关于函子和自然变换的概念不很符合. 如前注, ρ 是函子 $\mathscr{E}(K) \to \mathscr{P}(|K|)$. 因为没有以广群(范畴)为对象的范畴, 故不能将 $\mathscr{E}(\cdot)$ 或 $\mathscr{P}(|\ |)$ 视为函子, 故 ρ 不是自然变换. 本书给出的交换图表的概念, 仅指范畴中的对象与态的图表, 没有范畴与函子的图表, 因此, 推论之前的图表也要从新给出. 至于推论中的 $E(K, v_0)$ 和 $\pi(|K|, v_0)$, 是两个群. 按前面的习惯, 要将 E 和 π 视为函子, 而后者再与函子 $|\cdot|$ 合成, 才能考虑它们之间的自然变换. 这最后的 $\mathscr{E}(K^2) \approx \mathscr{E}(K)$. 本书并未给出两个范畴(从而广群)之间的等价定义及符号"$\approx$", 只能按意思理解为它们之间有两个"互逆的"协变函子. —— 译注

18. 推论 对任意有点单纯复形(K, v_0)，包含映射$K^2 \subset K$诱导同构

$$\pi(|K^2|, v_0) \approx \pi(|K|, v_0). \blacksquare$$

若s是K的单纯形，则其任两顶点属于$\mathscr{E}(K)$的同一分支。所以$\mathscr{E}(K)$的分支$\{E_j\}$确定了把K分割成子复形$\{K_j\}$，称为K的分支，由$E_j = \{s \in K | s$有某顶点在E_j中$\}$所确定。K若仅有一个分支，则称为连通的。

19. 定理 若$\{K_j\}$是K的分支集合，则$\{|K_j|\}$是$|K|$的道路分支集合。

证明 若v是K的顶点，则$\mathrm{st}\,v$是道路连通的，且从而属于$|K|$的与v相同的道路分支。从定理16得出，K的两顶点在$\mathscr{P}(|K|)$的同一分支中，当且仅当它们在$\mathscr{E}(K)$的同一分支中。所以，若$\{E_j\}$是$\mathscr{E}(K)$的分支集合，则$|K|$的道路分支集合是$\{P_j\}$，由$P_j = \bigcup\{\mathrm{st}\,v | v \in E_j\}$给出。显然，$P_j = |K_j|$。$\blacksquare$

§7 图

我们来说明棱道群$E(K, v_0)$的生成元和关系体系能够怎样决定。这提供了寻找一个多面体的基本群的生成元和关系的方法。因K的每一棱道是K的1维骨架的棱道，故我们从描述1维复形的棱道群着手。

一个1维单纯复形称为一个图，单连通的图称为树。

1. 引理 一个图是树，当且仅当它是可缩的[*]。

证明 因为可缩空间是单连通的，故一可缩图是树。反之，设K是树且设a_0是$|K|$的顶点。我们定义从$|K|$的恒同映射1到从$|K|$到a_0的常值映射c的同伦$F: |K| \times I \to |K|$。因为$|K|$是道路连通的，故对K的每顶点v，存在$|K|$中从v到a_0的道路ω_v。定义F在$v \times I$上使$F(v, t) = \omega_v(t)$。对K的每个1维单

[*] 因为树是一种图，是一种单纯复形，而单纯复形并无单连通的概念，故此处应理解为其空间单连通的图。可缩亦这样理解。——译注

纯形s，映射F定义在$|s|\times I$的子集

$$(|s|\times 0)\cup(|s|\times 1)\cup(|\dot{s}|\times I)$$

上。因为$|K|$是单连通的，且

$$(|s|\times I,\ (|s|\times 0)\cup(|s|\times 1)\cup(|\dot{s}|\times I))$$

同胚于(E^2, S^1)，故F可扩充到$|s|\times I$上。以此方式我们得到映射F: $|K|\times I\to|K|$，它限制在每个$|s|\times I$上连续。于是F是连续的，且F: $1\simeq c$. ∎

2. 引理 设K是连通单纯复形，则K包含一极大树，且任意极大树皆包含K的全部顶点。

证明 包含于K中的树的集合由包含关系给出偏序。设$\{K_j\}$是K中的树的一个全序集合，且设$T=\bigcup K_j$. 我们证明T是树。因为K_j是1维的，故T是1维的。因为$\{K_j\}$是树的全序集合，故T的任意有限子复形包含于某K_j中。为说明T是单连通的，设f: $S^i\to|T|$，其中$i=0$或1. 则$f(S^i)$是紧致的且从而包含于K_j中（对于某个j）。因为$|K_j|$是单连通的，故映射f: $S^i\to|K_j|$可扩充为映射f': $E^{i+1}\to|K_j|\subset|T|$，故$|T|$是单连通的。

作为其结果，K中的树的每个全序集合有作为其上界的树。利用Zorn引理可建立K中的极大的树。若T是K的极大的树，却又不包含K的全部顶点，则从K的连通性推出，存在一个1维单纯形$\{v_1, v_2\}\in K$，使$v_1\in T$及$v_2\notin T$. 设T_1为$T\cup\{\{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$. 因为$v_1$是$|\{v_1, v_2\}|$的强形变收缩核，故$|T|$是$|T_1|$的强形变收缩核。所以$|T_1|$是可缩的，且从而$T_1$是比$T$严格意义下更大的树，这与$T$的极大性相矛盾. ∎

从引理2推出若K是连通复形，且T是K中一个极大树，则$K-T$由维数$\geqslant 1$的单纯形组成。因为$|T|$是可缩的，故K中任意棱道由其在$K-T$中的部分所决定，如我们下面将会看到的，这启发出如下的定义。

设T是连通复形K的极大树。设G是由K的棱(v, v')生成的群，具有如下关系：

(a) 若(v, v')是T的棱，则$(v, v')=1$;

(b) 若 v、v' 和 v'' 是 K 的一个单纯形的顶点，则

$$(v, v')(v', v'')=(v, v'').$$

3. 定理 在上列记号下，$E(K, v_0)\approx G$.

证明 因 T 是连通的，且包含 K 的每个顶点，故对 K 的每顶点 v 存在 T 中的棱道 ζ_v，使 $\operatorname{orig}\zeta_v=v_0$ 及 $\operatorname{end}\zeta_v=v$. 若 (v, v') 是 K 的棱，则棱道 $\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}$ 是 K 中在 v_0 的闭棱道. 所以存在由 K 的棱生成的自由群 F 到 $E(K, v_0)$ 的同态 α，由 $\alpha(v, v')=[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}]$ 所定义.

我们证明 α 可分解出因子 G. 若 (v, v') 是 T 的棱，则 $\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}$ 是 T 的闭棱道. 因为 T 是单连通的，故

$$[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}]=1,$$

且 α 把 (a) 型关系变为 1. 若 v、v' 和 v'' 是 K 的一个单纯形的顶点，则

$$\begin{aligned}[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}]\circ[\zeta_{v'}(v', v'')\zeta_{v''}^{-1}]&=[\zeta_v(v, v')(v', v'')\zeta_{v''}^{-1}]\\&=[\zeta_v(v, v'')\zeta_{v''}^{-1}].\end{aligned}$$

所以 $$\alpha((v, v')(v', v''))=\alpha(v, v''),$$

且从而有同态 α': $G\to E(K, v_0)$ 使

$$\alpha'(v, v')=\alpha(v, v')=[\zeta_v(v, v')\zeta_{v'}^{-1}].$$

为证明 α' 是同构，我们构造一个逆 β': $E(K, v_0)\to G$ 如下：对每个闭棱道 $\zeta=e_1\cdots e_r$ 令 $\beta(\zeta)=e_1\cdots e_r$，其中的右侧理解为 G 中的乘积. 若 ζ 和 ζ' 是单纯等价的，则因为 (b) 型关系，

$$\beta(\zeta)=\beta(\zeta').$$

所以有同态 β': $E(K, v_0)\to G$ 使 $\beta'[\zeta]=\beta(\zeta)$.

我们来证明 α' 和 β' 是互逆的. 给定棱道

$$\zeta=(v_0, v_1)(v_1, v_2)\cdots(v_r, v_0),$$

则 $\alpha'\beta'[\zeta]=[\zeta']$，其中

$$\begin{aligned}\zeta'&=\zeta_{v_0}(v_0, v_1)\zeta_{v_1}^{-1}\zeta_{v_1}(v_1, v_2)\zeta_{v_2}^{-1}\cdots\zeta_{v_r}(v_r, v_0)\zeta_{v_0}^{-1}\\&\sim\zeta_{v_0}(v_0, v_1)(v_1, v_2)\cdots(v_r, v_0)\zeta_{v_0}^{-1}.\end{aligned}$$

因为 ζ_{v_0} 是单连通复形 T 的闭棱道，故 $\zeta_{v_0}\sim1$，且 $\zeta'\sim\zeta$. 所以 $\alpha'\beta'$ 是 $E(K, v_0)$ 的单位.

考察 $\beta'\alpha'(v, v')=\beta(\zeta_v)(v, v')\beta(\zeta_{v'}^{-1})$. 因为 ζ_v 和 $\zeta_{v'}^{-1}$ 是 T 的棱道,故它们是 T 的棱的积. 从而 $\beta(\zeta_v)$ 和 $\beta(\zeta_{v'}^{-1})$ 都等于 1, 由于(a)型关系. 所以 $\beta'\alpha'(v, v')=(v, v')$, 且因为 $\{(v, v')\}$ 生成 G,故 $\beta'\alpha'$ 在 G 上 $=1$. ▌

在 K 为有限的情况下, 它只有有限个棱. 于是 G 是有限生成的. 类似地,只有有限个(a)型和(b)型关系. 因此 G 可表成有限生成自由群对一有限生成子群的商群. 从而我们有以下推论:

4. 推论 *若 K 是有限连通单纯复形, 则 $E(K, v_0)$ 是可有限显示的.* ▌

5 推论 *若 K 是连通图,则 $E(K, v_0)$是自由群; 且若 T 是 K 中的极大树, 则 $E(K, v_0)$ 的生成元的集合与 $K-T$ 的 1 维单纯形集合是一一对应的.*

证明 考虑上述的群 G. 因为(a)型关系, 我们仅需考虑 K 的不在 T 中的棱. 每个这样的棱 e 对应 $K-T$ 的某个 1 维单纯形顶点的排列. (b) 型关系蕴涵其相反排列的棱在 G 中等于 e^{-1}. 所以群 G 由 $K-T$ 的每个 1 维单纯形的一个棱生成. 在 G 的这些生成元之间无关系. 因为,若 v、v' 和 v'' 是 K 的一个单纯形的顶点,则它们至少有两个相同. 若 $v=v'$ 或 $v'=v''$, 则(b)型对应的关系是平凡的关系 $1(v', v'')=(v', v'')$或$(v, v')1=(v, v')$. 若 $v=v''$, 对应的关系为$(v, v')(v', v)=1$. 用生成元的术语来说,是 $ee^{-1}=1$. ▌

6. 例 设 $J=\{j\}$ 是集合, 且设 X 是点标空间, 它是(在点标空间范畴中的)点标 1 维球 $\{S_j^1\}_{j\in J}$ 的和. 每个 S_j^1 可由 $\dot{s}_j$ 所三角剖分,其中 s_j 是 2 维单纯形 $s_j=\{v_j, v_j', v_j''\}$, 且 v_j 对应于 S_j^1 的基点. 于是 X 可三角剖分为复形 K, 顶点为

$$\{v\}\cup\{v_j', v_j''\}_{j\in J},$$

1 维单纯形为

$$\{\{v, v_j'\}\}_{j\in J}\cup\{\{v, v_j''\}\}_{j\in J}\cup\{\{v_j', v_j''\}\}_{j\in J}.$$

设 T 是 K 的一个极大树, 使 $K-T$ 由族 $\{\{v_j', v_j''\}\}_{j\in J}$ 组成. 从推论 5, $E(K, v)$ 一一对应于 J 的生成元上的自由群. 所以

$\pi(X, x_0)$ 与由 J 生成的自由群同构,其中 x_0 对应于 v.

7. 例 设 X 是 $\mathbf{R}^2$ 中 p 个分离的闭圆盘或点的补集. 则 X 与 p 个点标 1 维球之和有同一伦型. 所以 X 的基本群是 p 个生成元的自由群.

对于连通图,基本群函子是其所基于的空间和同伦类的范畴按群和同态的真确的表示. 在下述定理中概括这一点.

8. 定理 设 K_1 和 K_2 是连通图,且设 v_0 是 K_1 的顶点. 则

(a) 任意连续映射 $f: |K_1| \to |K_2|$ 同伦于连续映射 $f': |K_1| \to |K_2|$,使 $f'(v_0)$ 是 K_2 的顶点.

(b) 若 v_0' 是 K_2 的任意顶点,且

$$h: \pi(|K_1|, v_0) \to \pi(|K_2|, v_0')$$

是任一同态,则存在连续映射 $f: (|K_1|, v_0) \to (|K_2|, v_0')$ 使 $h = f_\#$.

(c) 设 v_0' 和 v_0'' 是 K_2 的顶点,且设 $f_1, f_2: |K_1| \to |K_2|$ 是映射,使 $f_1(v_0) = v_0'$, $f_2(v_0) = v_0''$. 则 $f_1 \simeq f_2$, 当且仅当存在 $|K_2|$ 中的从 v_0' 到 v_0'' 的道路 ω 使下述三角形交换.

$$\begin{array}{ccc} & \pi(|K_1|, v_0) & \\ {\scriptstyle f_{1\#}} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle f_{2\#}} \\ \pi(|K_2|, v_0') & \xleftarrow{h_{[\omega]}} & \pi(|K_2|, v_0'') \end{array}$$

证明 因 K_2 是连通的,故 $|K_2|$ 是道路连通的,且 (a) 从偶 $(|K_1|, v_0)$ 对于 $|K_2|$ 有同伦扩充性质这一事实得出(依推论 3.2.5).

为了证明(b),设 T 是 K_1 中的极大树. 设 $\{s_j\}$ 是 $K_1 - T$ 的单纯形集合,且对每个 j,设 $e_j = (v_j, v_j')$ 是棱,其顶点为 s_j 在某个排列中的顶点,对 K_1 中每顶点存在 T 中从 v_0 到 v 的棱道 ζ_v. 对每个 j 设

$$\omega_j = \zeta_{v_j} e_j \zeta_{v_j'}^{-1}|,$$

则 $[\omega_j] \in \pi(|K_1|, v_0)$, 且由推论 5 和 3.6.17, 集合 $\{\omega_j\}$ 是 $\pi(|K_1|, v_0)$ 的自由生成元体系. 对每个 j, 设 ω_j' 是 $|K_2|$ 中在 v_0'

的闭路，使 $h[\omega_j]=[\omega'_j]$. 我们定义连续映射

$$f:(|K_1|,v_0)\to(|K_2|,v'_0)$$

使 $f(|T|)=v'_0$. 且对每 j, 我们定义 $f||s_j|$ 使

$$f(tv'_j+(1-t)v_j)=\omega'_j(t),$$

其中 $|s_j|$ 的点表为形式 $tv'_j+(1-t)v_j$(对 $t\in I$). f 是连续的，因为它限制在 $|T|$ 和每个 $|s_j|$ 上连续. 显然，

$$f_*[\omega_j]=[\omega'_j]=h[\omega_j];$$

所以 $f_*=h$.

为了证明(c)，注意，若 $f_1\simeq f_2$, 则有 $|K_2|$ 中从 v'_0 到 v''_0 的道路 ω, 使得由定理1.8.7, $f_{1*}=h_{[\omega]}f_{2*}$. 反之，若 $f_{1*}=h_{[\omega]}f_{2*}$, 设 T 是 K_1 中极大树，且对 K_1 的每顶点 v, 设 ζ_v 是 T 中从 v_0 到 v 的一个棱道. 我们通过一系列步骤来定义 $F:|K_1|\times I\to|K_2|$ 作为从 f_1 到 f_2 的同伦. 首先置 $F(x,0)=f_1(x)$ 及 $F(x,1)=f_2(x)$ (对 $x\in|K_1|$). 则 F 在 $(|K_1|\times 0)\cup(|K_1|\times 1)$ 上已定义了. 若 v 是 K_1 的顶点，我们定义

$$F(v,t)=((f_1(|\zeta_v^{-1}|)*\omega)*f_2|\zeta_v|)(t)\ (\text{对 } t\in I).$$

则 $F(v,0)=f_1(v)$ 及 $F(v,1)=f_2(v)$, 于是 F 定义在 $|K_1^0|\times I$ 上，并在 $(|K_1|\times 0)\cup(|K_1|\times 1)$ 上与前边的定义符合. 只剩下扩充 F 于 $|s|\times I$ 上(对每个1维单纯形 $s\in K_1$). 设 v 和 v' 是 s 在某排列中的顶点. 则 $|s|\times I$ 是个方块，以下述随意结合的乘积为其边界

$$(|(v,v')|\times 0)*(v'\times I)*(|(v,v')|\times 1)*(v\times I)^{-1}.$$

F 可扩充于 $|s|\times I$ 上，当且仅当 F 映这个乘积于 $|K_2|$ 上的一个零伦的道路. 由 F 的定义，上述道路变到一个同伦于下述随意结合的道路的乘积

$$\begin{aligned}
&f_1|(v,v')|*(f_1|\zeta_{v'}^{-1}|*\omega*f_2|\zeta_{v'}|)*f_2|(v',v)|\\
&\quad*(f_2|\zeta_v^{-1}|*\omega^{-1}*f_1|\zeta_v|)\\
&\simeq f_1|(v,v')|*f_1|\zeta_{v'}^{-1}|\\
&\quad*(\omega*f_2(|\zeta_{v'}|*|(v',v)|*|\zeta_v^{-1}|)*\omega^{-1})*f_1|\zeta_v|\\
&\simeq f_1|(v,v')|*f_1|\zeta_{v'}^{-1}|*f_1(|\zeta_{v'}|*|(v',v)|
\end{aligned}$$

$$*(\zeta_v^{-1})*f_1(\zeta_v)$$

$$\simeq e_{f_1(v)}.$$

所以，F 可扩充到 $|s|\times I$ 上，且得到的映射 $F: |K_1|\times I\to|K_2|$ 是连续的，因为对 K_1 中每个闭单纯形 $\bar{s}$，它限制在 $|\bar{s}|\times I$ 上是连续的．故 $F: f_1\simeq f_2$．∎

从定理 8(b) 得出，若 $f: (|K_1|, v_0)\to(|K_2|, v_0')$ 诱导同构

$$f_{\#}: \pi(|K_1|, v_0)\approx\pi(|K_2|, v_0'),$$

则有一连续映射 $g: (|K_2|, v_0')\to(|K_1|, v_0)$ 使 $g_{\#}=(f_{\#})^{-1}$．由定理 8(c) 得出 $gf\simeq 1_{|K_1|}$，且 $fg\simeq 1_{|K_2|}$．从而我们有下一个结果．

9．推论 *设 K_1 和 K_2 是连通图，K_1 有一顶点 v_0，K_2 有一顶点 v_0'．连续映射 $f: (|K_1|, v_0)\to(|K_2|, v_0')$ 是同伦等价，当且仅当它诱导同构 $f_{\#}: \pi(|K_1|, v_0)\approx\pi(|K_2|, v_0')$．* ∎

在证明 8(c) 时构造同伦 F 所用的逐步扩充程序，是在复形的空间上构造连续映射的典型方法．映射在一个骨架上构造好，立刻扩充到下一个骨架．

§8 例子和应用

本节包含涉及基本群的各种结果．我们从自由群理论的一些应用开始；特别是，我们证明自由群的任意子群是自由的．其次，我们考虑把一个 2 维胞腔贴加在一空间上对其基本群的影响．我们应用得到的结果证明任一群同构于某空间的基本群．最后，描述如何以生成元和关系表示一个曲面的基本群．

若 K 是单纯复形且 $\alpha\in|K|$ 有承载子 s（亦即 $\alpha\in\langle s\rangle$），则对 $\dot{s}$ 的任意重分 K'，单纯复形 $K'*\alpha$ 是 $\bar{s}$ 的重分（由引理 3.3.8）．这得出 K 的一个改进的重心重分可以构造出来，其顶点是 α 以及异于 s 的单纯形的重心．所以 K 有一个重分，以 α 为一顶点，并有以下结果．

1．引理 *若 $\alpha\in|K|$，则存在 K 的重分 K' 以 α 为一顶点．* ∎

2．定理 *多面体是局部可缩的．*

证明 观察引理1，只要证明若v是单纯复形K的顶点，则v在$|K|$中的每个邻域U包含一个v的邻域V，它在U中可形变到v即可．设U是v的邻域，且设$A=\mathrm{st}\,v$，定义$F: A\times I\to|K|$，使

$$F(\alpha,\ t)=tv+(1-t)\alpha.$$

则F将A在$|K|$中形变到点v，且

$$F(v\times I)=v\in U.$$

所以有v在A中的某邻域V使得

$$F(V\times I)\subset U.$$

因为$A=\mathrm{st}\,v$在$|K|$中是开的，故V是v在$|K|$中的邻域．因为$F|V\times I$是V在U中到v的形变，所以$|K|$是局部可缩的．▌

由定理2得出覆叠空间的理论可应用于多面体，且对应于多面体的基本群的任一子群存在覆叠投射．我们来说明多面体的任意覆叠投射对应一个单纯映射．

3．定理 *设$p: \tilde{X}\to X$是覆叠投射，其中X是多面体，则$\tilde{X}$是多面体，与X有相同维数，且p以此方式对应一单形映射．*

证明 设$p: \tilde{X}\to|K|$是覆叠投射．对任意单纯形$s\in K$，闭单纯形$|s|$是单连通的．从升腾定理推得包含映射$|s|\subset|K|$可升腾于映射$|s|\to\tilde{X}$，且从唯一升腾定理得出，两个这样的升腾或则重合，或则有分离的象．从而存在$\tilde{X}$的与$|s|$相同的一些叶，共有$|s|$的升腾的个数那么多个．

定义单纯复形$\tilde{K}$，以族$\{p^{-1}(v)\,|\,v$是K的顶点$\}$为顶点的集合，且$\tilde{s}=\{\tilde{v}_0,\ \cdots,\ \tilde{v}_q\}$是$\tilde{K}$的单纯形，当且仅当有一$K$中的单纯形$s=\{v_0,\ \cdots,\ v_q\}$及$|s|$的一升腾$f_{\tilde{s}}: |s|\to\tilde{X}$，使

$$f_{\tilde{s}}(v_i)=\tilde{v}_i\quad(\text{对}\ 0\leqslant i\leqslant q)$$

[在此情况下$s=p(\tilde{s})$及$f_{\tilde{s}}$都唯一]．则$\tilde{K}$是单纯复形且与K有相同的维数．若$\tilde{s}_1$是$\tilde{s}$的面，则$p(\tilde{s}_1)$是$p(\tilde{s})$的面，且

$$f_{\tilde{s}}\,|\,|p(\tilde{s}_1)|=f_{\tilde{s}_1}.$$

所以族$\{f_{\tilde{s}}\}_{\tilde{s}\in\tilde{K}}$确定了连续映射$f: |\tilde{K}|\to\tilde{X}$使

$$f(\sum\alpha_i\tilde{v}_i)=f_{\tilde{s}}(\sum\alpha_i p(\tilde{v}_i)),\ \text{对}\ \sum\alpha_i\tilde{v}_i\in|\tilde{s}|,$$

令 $\varphi: \widetilde{K}\to K$ 是单纯映射使 $\varphi(\tilde{v})=p(\tilde{v})$. 则存在交换三角形

$$\begin{array}{ccc} |\widetilde{K}| & \xrightarrow{f} & \widetilde{X} \\ & {\scriptstyle|\varphi|}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & |K| & \end{array}$$

为了完成定理的证明, 只要证明 $(\widetilde{K}, f)$ 是 $\widetilde{X}$ 的三角剖分(亦即 f 是同胚)即可. 若 v 是 K 的顶点, 则 $\mathrm{st}\,v$ 是可缩的, 且被 p 平均覆叠. 对于 $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$, 设 $U_{\tilde{v}}$ 是 $p^{-1}(\mathrm{st}\,v)$ 的包含 $\tilde{v}$ 的分支. 则 $p|U_{\tilde{v}}$ 是 $U_{\tilde{v}}$ 到 $\mathrm{st}\,v$ 的同胚. 由 $\widetilde{K}$ 和 φ 的定义, $|\varphi|\,|\mathrm{st}\,\tilde{v}$ 是 $\mathrm{st}\,\tilde{v}$ 到 $\mathrm{st}\,v$ 的同胚(对于 $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$). 从上述三角形的交换性知 $f|\mathrm{st}\,\tilde{v}$ 是 $\mathrm{st}\,\tilde{v}$ 到 $U_{\tilde{v}}$ 的同胚(对于 $\tilde{v}\in p^{-1}(v)$). 因为

$$|\varphi|^{-1}(\mathrm{st}\,v)=\bigcup\{\mathrm{st}\,\tilde{v}\mid\tilde{v}\in p^{-1}(v)\},$$

故 $f|\,|\varphi|^{-1}(\mathrm{st}\,v)$ 是从 $|\varphi|^{-1}(\mathrm{st}\,v)$ 到 $p^{-1}(\mathrm{st}\,v)$ 的同胚. 因为这对 K 的每个顶点 v 都成立, 所以 f 是 $|\widetilde{K}|$ 到 $\widetilde{X}$ 的同胚. ▌

下述推论是这些结果的应用.

4. 推论 自由群的任意子群是自由的.

证明 设 F 是自由群. 从例 3.7.6 得出存在多面体 X 以 x_0 为基点, 使 $\pi(X, x_0)\approx F$(事实上 X 是一些 1 维球的楔和*)). 设 F' 是 F 的任意子群. 在上述同构下, F' 对应于子群 $H\subset\pi(X, x_0)$. 设 $p: \widetilde{X}\to X$ 是覆叠投射, 使 $\widetilde{X}$ 是道路连通的, 且

$$p(\tilde{x}_0)=x_0,\quad p_*\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)=H.$$

则由定理 3, $\widetilde{X}$ 同胚于一个连通图的空间. 再由推论 3.7.5, $\pi(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是自由群. ▌

若 K 是有限连通图, 则从推论 3.7.5 得出, $E(K, v_0)$ 是 $1-n_0+n_1$ 个生成元上的自由群, 其中 n_0 是 K 的顶点个数, n_1 是 K 的 1 维单纯形的个数. 若 $p: \widetilde{X}\to|K|$ 是重数为 m 的覆叠投射, 则对应的 $\widetilde{X}$ 的(由定理 3 给出的)三角剖分 $(\widetilde{K}, f)$ 中, q 维单纯形的个数等于 mn_q, 其中 n_q 是 K 的 q 维单纯形的个数. 所以证明推论 4 所用的方法也建立了下述的结果:

5. 推论 设 F 是 n 个生成元上的自由群, 且设 F' 是 F 的

*) 楔和, 或称为在一点相触, 指在点标范畴中的和. ——译注

指数为 m 的子群．则 F' 是 $1-m+mn$ 个生成元上的自由群．▮

我们现在研究贴加胞腔过程在基本群上的影响．设 A 是空间 X 的闭子集．X 称为从 A 贴上 n 维胞腔 $\{e_j^n\}$ 而得到的，其中 $n\geqslant 0$，若

(a) 对每个 j，e_j^n 是 X 的子集；

(b) 若 $\dot{e}_j^n=e_j^n\cap A$，则对 $j\neq j'$，$e_j^n-\dot{e}_j^n$ 是与 $e_{j'}^n-\dot{e}_{j'}^n$ 分离的；

(c) X 有关于 $\{A, e_j^n\}$ 的上凝聚拓扑，且 $X=A\cup\bigcup_j e_j^n$；

(d) 对每个 j，有映射

$$f_j\colon (E^n, S^{n-1})\to(e_j^n, \dot{e}_j)$$

使 $f_j(E^n)=e_j^n$，f_j 是 E^n-S^{n-1} 到 $e_j^n-\dot{e}_j^n$ 的同胚．且 e_j^n 有由 f_j 和包含映射 $\dot{e}_j^n\subset e_j^n$ 的上诱导的拓扑．

注意，若 $n=0$，则 X 是 A 和离散空间的拓扑和．映射

$$f_j\colon (E^n, S^{n-1})\to(e_j^n, \dot{e}_j^n)$$

满足以上条件(d)的，称为对 e_j^n 的示性映射，且 $f_j|S^{n-1}\colon S^{n-1}\to A$ 称为对 e_j^n 的贴加映射．X 由 A 及贴加映射族 $\{f_j|S^{n-1}\}$ 所示性．给定 A 和带指标的映射族 $\{g_j\colon S^{n-1}\to A\}$，存在由 A 被映射 g_j 贴加 n 维胞腔 $\{e_j^n\}$ 得到的空间 X．X 定义为拓扑和 $\vee E_j^n\vee A$ 的商空间，其中 $E_j^n=E^n$(对于每个 j)，在叠合 $z\in S_j^{n-1}$ 于 $g_j(z)\in A$ 下取商．于是，包含映射 $(E_j^n, S_j^{n-1})\subset(\vee E_j^n\vee A, \vee S_j^{n-1}\vee A)$ 与向 (X, A) 的投射合成得到示性映射 $f_j\colon (E_j^n, S_j^{n-1})\to(X, A)$，对一 n 维胞腔 $e_j^n=f_j(E_j^n)$．

下列为两个例子：

6. 若 K 是单纯复形，则 $|K^q|$ 是由 $|K^{q-1}|$ 贴加一些 q 维胞腔 $\{|s|\,|s$ 是 K 的 q 维单纯形$\}$ 所得到的．

7. 对于 $i=1, 2$ 或 4，设 F_i 分别是 $\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{Q}$，且对于 $q\geqslant 0$ 设 $P_q(F_i)$ 是实的，复的或四元数 q 维射影空间．$P_q(F_i)$ 由映射 $[t_0, t_1, \cdots, t_q]\to[t_0, t_1, \cdots, t_q, 0]$ 嵌入 $P_{q+1}(F_i)$(其中 $t_j\in F_i$)．则 $P_{q+1}(F_i)$ 由 $P_q(F_i)$ 贴加一个 $(q+1)i$ 维胞腔得到．若 $E^{(q+1)i}$ 叠合于空间 $\{(t_0, t_1, \cdots, t_q)\in F_i^{q+1}|\sum|t_j|^2\leqslant 1\}$，则对这单个胞腔的示性映射 $f\colon (E^{(q+1)i}, S^{(q+1)i-1})\to(P_{q+1}(F_i), P_q(F_i))$ 由等式

$$f(t_0, t_1, \cdots, t_q) = [t_0, t_1, \cdots, t_q, 1-\sum |t_i|^2]$$

所定义.

8. 引理 设 X 是由 A 贴加一些 n 维胞腔得到的(对 $n \geqslant 2$). 则对任意点 $x_0 \in A$, 包含映射 $i: (A, x_0) \subset (X, x_0)$ 诱导满同态

$$i_{\#}: \pi(A, x_0) \to \pi(X, x_0).$$

证明 设 X 由 A 贴加 n 维胞腔 $\{e_j^n\}$ 得到, 且对每 j 设

$$y_j \in e_j^n - \dot{e}_j^n.$$

又设 B_j 是 y_j 在 $e_j^n - \dot{e}_j^n$ 中的同胚于 E^n 的邻域. 设 $\omega: (I, \dot{I}) \to (X, x_0)$ 是在 x_0 的闭道路. 我们来证明 ω 同伦于 $U = X - \{y_j\}_j$ 中的某个道路. 由 I 的紧致性, 我们可重分 I 由点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

给出, 使对 $0 \leqslant i < n$, 或则

$$\omega[t_i, t_{i+1}] \subset U,$$

或则 $\omega[t_i, t_{i+1}] \subset B_j$ (对某 j).

若 $\omega[t_i, t_{i+1}] \cup \omega[t_{i+1}, t_{i+2}] \subset \mathring{B}_j$,

我们能从 I 的重分删去点 t_{i+1} 而得到 I 的另一个重分, 使得若

$$\omega[t_i, t_{i+1}] \subset B_j,$$

则 $\omega[t_{i-1}, t_i]$ 与 $\omega[t_{i+1}, t_{i+2}]$ 二者都不包含于 B_j 中. 那么, $\omega(t_i) \neq y_j$, 且 $\omega(t_{i+1}) \neq y_j$. 对每个这样的 i, 因为 $B_j - y_j$ 是道路连通的, 且 B_j 是单连通的, 故 $\omega | [t_i, t_{i+1}]$ 相对于 $\{t_i, t_{i+1}\}$ 同伦于 $B_j - y_j$ 中的一道路. 因为 I 的这种子区间仅有有限个, 故 $\omega \simeq \omega'$, 其中 $\omega'(I) \subset U$.

因为 S^{n-1} 是 E^n 减去一点的强形变收缩核, 所以 $\dot{e}_j^n$ 是 $e_j^n - y_j$ 的强形变收缩核. 故 A 是 U 的强形变收缩核, 且 $\omega' \simeq \omega''$, 其中

$$\omega''(I) \subset A,$$

则 $i_{\#}[\omega''] = [\omega]$. ∎

9. 推论 对所有 $n \geqslant 0$, $P_n(\mathbf{C})$ 和 $P_n(\mathbf{Q})$ 是单连通的.

证明 因为 $P_0(\mathbf{C})$ 和 $P_0(\mathbf{Q})$ 皆为单点空间, 则结论由对 q 归纳证明出来, 还要用到引理 8 以及下述事实: $P_{q+1}(\mathbf{C})$ 由 $P_q(\mathbf{C})$ 贴加一个 $2(q+1)$ 维胞腔而得到, $P_{q+1}(\mathbf{Q})$ 由 $P_q(\mathbf{Q})$ 贴加一个

$4(q+1)$ 维胞腔而得到. ▌

对于 $n=2$ 的情况, 我们希望计算出 i_* 的核. 给定任意映射 $g: S^1\to A$, 其中 A 是道路连通的, 且给定点 $x_0\in A$. $\pi(A, x_0)$ 的一个正规子群如下决定: 若 $g(p_0)=x_1$ 且 ω 是 A 中从 x_0 到 x_1 的道路, 则 $h_{[\omega]}g_*(\pi(S^1, p_0))$ 是 $\pi(A, x_0)$ 的循环子群. 对于 ω 的不同选择, 我们得到 $\pi(A, x_0)$ 中的共轭子群. 所以 $\pi(A, x_0)$ 的由 $h_{[\omega]}g_*(\pi(S^1, p_0))$ 生成的正规子群不依赖于道路 ω 的选择. 类似的命题应用于映射族 $\{g_j: S^1\to A\}$. 则存在完全确定的 $\pi(A, x_0)$ 中由这些映射决定的正规子群.

10. 定理 *设 A 是连通多面体, 且设 X 是由 A 贴加一些 2 维胞腔而得到, 其诸示性映射为 $\{g_j: S^1\to A\}$. 若 N 是 $\pi(A, x_0)$ 的正规子群由映射 $\{g_j\}$ 所决定, 则*

$$i_*: \pi(A, x_0)\to\pi(X, x_0)$$

是以 N 为核的满同态.

证明 由引理 8, i_* 是满映. 设 $p: \tilde{A}\to A$ 是个覆叠投射, 使 $\tilde{A}$ 是道路连通的, $p(\tilde{x}_0)=x_0$, 且 $p_*(\pi(\tilde{A}, \tilde{x}_0))=N$. 因为 N 在 $\pi(A, x_0)$ 中是正规的, 故 p 是正则覆叠投射. 因为 N 是由映射族 $\{g_j\}$ 决定的子群, 故每每映射 g_j 升腾于映射 $\tilde{g}_j: S^1\to\tilde{A}$. 设 $\tilde{X}$ 是由 $\tilde{A}$ 被所有升腾映射 $\{\tilde{g}_j\}$ 贴加 2 维胞腔得到的, 且扩充 p 为 p': $\tilde{X}\to X$, 使 p' 映 $\tilde{X}$ 的每个 2 维胞腔于它在 X 上对应的 2 维胞腔上. 则不难看出 p' 为覆叠投射.

我们从 N 的定义知道 $i_*(N)=1$. 假设 $[\omega]\in\pi(A, x_0)$ 是在 i_* 的核中的元素. 设 $\tilde{\omega}$ 是 ω 在 $\tilde{A}$ 中的任意升腾, 使 $\tilde{\omega}(0)=\tilde{x}_0$. 则 $\tilde{\omega}$ 是 ω 在 $\tilde{X}$ 中的升腾. 因为 ω 在 X 中是零伦的, 故 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{X}$ 中的闭道路. 所以 $\tilde{\omega}$ 是 $\tilde{A}$ 中的闭道路, 且从而

$$[\omega]=p_*[\tilde{\omega}]\in N. \ ▌$$

注意, 为证明定理 10, 并不要求 A 一定要是连通多面体. 假设 A 道路连通局部道路连通且半局部单连通已足够.

11. 推论 *对任一群 G 存在空间 X 使 $\pi(X, x_0)\approx G$.*

证明 将 G 表示为自由群 F 和正规子群 N 的商群. 则有多

面体 A 使 $\pi(A, x_0)\approx F$(事实上如在例 3.7.6 中，A 可取为 1 维球的楔和)．对每一 $\lambda\in N$，设 $g_\lambda:(S^1, p_0)\to(A, x_0)$ 是映射使 $[g_\lambda]$ 在同构 $\pi(A, x_0)\approx F$ 下对应于 λ．设 X 是由 A 被映射族 $\{g_\lambda\}$ 贴加 2 维胞腔得到的．则由定理 10，有同构 $\pi(X, x_0)\approx G$． ∎

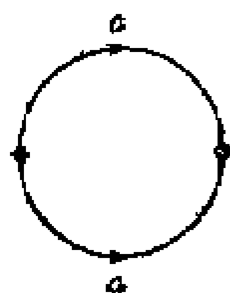
我们以下专门研究曲面的情况．曲面是一种有限 2 维无边伪流形的空间．一个 n 维无边伪流形(或绝对 n 维圈)是个单纯复形 K，使

(a) K 的每个单纯形是 K 的某个 n 维单纯形的面；

(b) K 的每个 $n-1$ 维单纯形恰是 K 的两个 n 维单纯形的面；

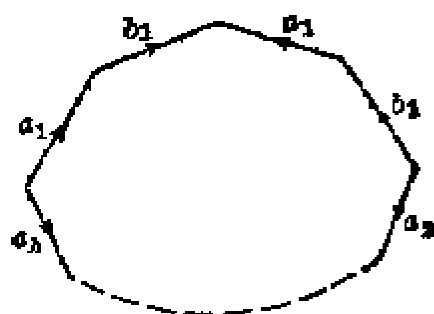
(c) 若 s 和 s' 是 K 的 n 维单纯形，则有 K 的 n 维单纯形的有限叙列 $s=s_1, s_2, \cdots, s_m=s'$，使 s_i 和 $s_{i+1}(1\leqslant i<m)$ 有一个公共的 $n-1$ 维面．

我们定义曲面是有限 2 维无边闭伪流形的空间，且每个顶点的星形同胚于 $\mathbf{R}^2$．可以说明[*)]，每个曲面有一个正规的形式，由平面上的多边形叠合一些棱而形成．带 $h\geqslant 0$ 个柄和 k 个交叉帽的归入一类．带 0 个柄的曲面是多边形如图 11 所示的叠合其棱．



带有 0 个柄的曲面

图 11



带有 $h>0$ 个环柄的曲面

图 12

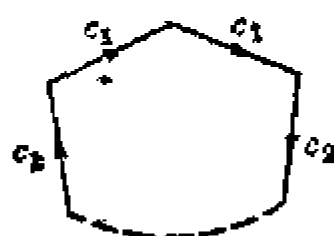
在拓扑上它同胚于 2 维球 S^2．对 $h>0$，带 h 个柄的曲面如图 12 所示．

---

*) 见 S. Lefschetz: *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949; 和 H. Seifert, W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1934 — 原注

带1个柄的曲面在拓扑上是环面.

对 $k\geqslant 1$，带 k 个交叉帽的曲面如图13所示. 带1个交叉帽的曲面在拓扑上是实射影平面 P^2；带两个交叉帽的曲面在拓扑上是克莱因(Klein)瓶.



带有 $k>0$ 个交叉帽的曲面

图 13

此正规形式将带有 $h\geqslant 1$ 个柄的曲面表示为 $2h$ 个1维球的楔和，再由一适当映射贴加上一个2维胞腔. 若 A 是 $2h$ 个1维球的楔和，则 $\pi(A)$ 是 $2h$ 个生成元上的自由群，其生成元记为 a_i 和 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 若 X 是带有 h 个柄的曲面，则 X 由 A 被映射 $g: S^1\to A$ 贴加一个2维胞腔而得到，使 g_* 映 $\pi(S^1)$ 的一生成元到元素 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}\in\pi(A)$. 定理10则为 $\pi(X)$ 提供了按生成元和关系的语言的描述. 类似的考察应用于带 $k\geqslant 1$ 个交叉帽的曲面. 其结果综述如下:

12. 一个曲面的基本群的构造如下述:

(a) 不带柄的曲面是平凡群;

(b) 带有 $h\geqslant 1$ 个柄的曲面是以 $a_1, b_1, \cdots, a_h, b_h$ 为生成元，且有关系 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}=1$ 的群;

(c) 带有 $k\geqslant 1$ 个交叉帽的曲面是以 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为生成元，且有关系 $c_1^2c_2^2\cdots c_k^2=1$ 的群.

第3章习题

A 多面体的拓扑性质

1. 证明紧致多面体是绝对邻域收缩核.[提示 设 $X=|K|$ 且设 K 是个单纯形 s 的子复形. 使用对 $s-K$ 中的单纯形的个数归纳, 以及绝对邻域收缩核的开子集的收缩核是绝对邻域收缩核这事实.]
2. 给出一个例子. 空间 X 和闭子集 $A\subset X$ 使 A 和 X 是两个多面体, 但 (X, A) 不是多面体偶.
3. 证明紧致多面体的开子集是一多面体.[提示: 因 $|K|-U$ 是个 G_δ, 故存在 $|K|$ 的开子集叙列 V_i 使 $\cap V_i=|K|-U$. 对 n 归纳, 构造重分 K_n 叙列及子复形 $L_n\subset K_n$, 使得 (a) K_n 比覆盖 $\{U, V_n\}$ 细; (b) L_n 是 K_n 的最大子复形, 使 $|L_n|\subset U$; (c) K_{n+1} 是 K_n 的重分, 包含 L_n 为子复形. 则 $L=\cup L_n$ 是单纯复形, 使 $|L|=|K|-U$.]
4. 设 Y 是 n 连通空间, 且 K 是单纯复形. 证明任意连续映射 $|K|\to Y$ 同伦于把 $|K^n|$ 映到单点的映射. 若 f_0, f_1: $(|K|, |K^n|)\to(Y, y_0)$ 是同伦的, 证明它们相对于 $|K^{n-1}|$ 是同伦的.
5. 设 Y 是对每个 n 的 n 连通空间, 且设 (X, A) 是多面体偶. 证明两个映射 $X\to Y$ 若在 A 上重合, 则相对于 A 是同伦的.
6. 证明一多面体是可缩的, 当且仅当它对每个 n 是 n 连通的. 若它有有限维数 m, 则它是可缩的, 当且仅当它是 m 连通的.

B 例子

1. 证明, 对所有的 n, P^n 是多面体.
2. 设 K 是由顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_p$ 和单纯形 $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \cdots, \{v_{p-1}, v_p\}$ 和 $\{v_p, v_1\}$ 组成的单纯复形, 且设 I 是以 0 和 1 为顶点及 $\{0, 1\}$ 为 1 维单纯形的单纯复形. 则 $K*I$ 是单纯复形, 以 $v_1, \cdots, v_p$, 0 和 1 为顶点. 若 q 是与 p 互素的整数, 且 v_i 对所有整数 i 有定义, 使等于 v_j (若 $i\equiv j \bmod p$), 则设 X 是由 $|K*I|$ 把 2 维单纯形 $\{v_i, v_{i+1}, 0\}$ 线性地叠合于 2 维单纯形 $\{v_{i+q}, v_{i+q+1}, 1\}$ (对所有 i) 而得到的空间. 证明 X 同胚于透镜空间 $L(p, q)$, 且 X 是多面体.

3. 证明广义透镜空间$L(p, q_1, \cdots, q_n)$是多面体.

4. 若 X 和 Y 是多面体，且它们中之一是局部紧致的，证明 $X*Y$ 和 $X\times Y$ 也是多面体.

C 伪流形

一单纯复形称为齐次 n 维的，若每个单纯形是该复形的某 n 维单纯形的面. 一个 n 维伪流形是一单纯复形 K，使

(a) K 是齐次 n 维的;

(b) K 的每个$(n-1)$维单纯形是 K 的最多两个 n 维单纯形的面;

(c) 若 s 和 s' 是 K 的 n 维单纯形，则存在 K 的 n 维单纯形的有限叙列 $s=s_1, s_2, \cdots, s_m=s'$，使 s_i 和 s_{i+1} 有一公共$(n-1)$维面$(1\leqslant i<m)$.

n 维伪流形 K 的边缘，记为 $\dot{K}$，定义为 K 的子复形，由恰好作为一个 n 维单纯形的面的$(n-1)$维单纯形的集合生成*). （若 $\dot{K}$ 是空集，则 K 是无边 n 维伪流形，如 § 3.8 中所定义.）

1. 证明 n 维单纯形是 n 维伪流形，其边缘作为伪流形是 $\dot{s}$.
2. 若 K 是伪流形，且 L 是 K 的重分，证明 L 是伪流形，且 $\dot{L}=L|\dot{K}$.
3. 若 K 是有限 1 维伪流形，证明 $\dot{K}$ 或则为空集，或则恰好由两个顶点组成.
4. 给出一个 n 维伪流形 K，使 $\dot{K}$ 既非空集又非$(n-1)$维伪流形的例子.

D 单纯映射

在前 4 个习题中，K 是有限 n 维伪流形，其中 $n>0$，有非空边缘 $\dot{K}$，K' 是 K 的单纯重分，且φ: $K'\to K$ 是单纯映射，使 $\varphi|\dot{K}'$ 映 $\dot{K}'$ 到 $\dot{K}$ 为恒同映射 $|K'|\subset|K|$的单纯逼近. 进一步，s^{n-1} 是 $\dot{K}$ 的确定的$(n-1)$维单纯形且 s^n 是 K 的以 s^{n-1} 为面的唯一的 n 维单纯形.

1. 对 K' 的每个 n 维单纯形 s' 设 $\alpha(s')$是 s' 由 φ 映入 s^{n-1} 的$(n-1)$维面的个数. 证明 $\alpha(s')=1$，当且仅当 φ 映 s' 入 s^n；且 $\alpha(s')=0$或 2(对其它情况).
2. 证明 $\dot{K}'$ 中由 φ 映入 s^{n-1} 的$(n-1)$维单纯形的个数与 K' 中的由 φ 映入 s^{n-1} 的$(n-1)$维单纯形的个数有相同的奇偶性. [提示：它们两个与 $\sum\alpha(s')$同奇偶性，这里和式是对 K' 中所有 n 维单纯形 s' 来取的.]
3. **Sperner 引理** 证明 K' 中由 φ 映入 s^n 的 n 维单纯形的个数是奇数. [提示：对 n 用归纳法.]
4. 证明 $|\dot{K}|$ 不是 $|K|$ 的收缩核.
5. **Brouwer 不动点定理** 证明 E^n 到自身的每个连续映射有不动点.

E 单纯映射柱

*) 指由这些单纯形的所有面组成的复形. ——译注

设 $\varphi: K\to L$ 是在其顶点集合互相分离的单纯复形之间的单纯映射. 假设 K 的顶点给出全序. φ 的*单纯映射柱* M 是单纯复形, 其顶点集合是 K 和 L 的顶点集合的并. 且其单纯形是 K 的和 L 的单纯形以及形如 $\{v_0, \cdots, v_k, \varphi(v_k), \cdots, \varphi(v_p)\}$ 的集合的所有子集, 其中 $\{v_0, v_1, \cdots, v_p\}$ 是 K 的单纯形, 且 $v_0<v_1<\cdots<v_p$ 与 K 的顶点的全序相同.

1. 证明包含映射 $i: K\subset M$ 和 $j: L\subset M$ 是单纯映射. 若 $\rho: M\to L$ 使 $\rho(v)=\varphi(v)$(对 K 的顶点 v), 及 $\rho(v')=v'$(对 L 的顶点 v'), 证明 ρ 是单纯映射使 $\varphi=\rho\circ i$ 及 $\rho\circ j=1_L$.
2. 若 K 有限, 证明 $j\circ\rho$ 和 1_M 是邻接的.
3. 证明 $|M|$ 同胚于连续映射 $|\varphi|: |K|\to|L|$ 的映射柱.

F 棱道群

1. 证明若 K 是单纯复形, 则存在在 $|K|$ 上取值 $\mathscr{C}$ 的局部体系的等价类和从 K 的棱道广群到 $\mathscr{C}$ 的协变函子的自然等价类间的一一对应.
2. **VanKampen** 单纯复形定理[*] 设 K 是连通单纯复形, 有连通子复形 L_1 和 L_2, 使 $L_1\cap L_2$ 连通且 $K=L_1\cup L_2$. 设 v_0 是 $L_1\cap L_2$ 的顶点, 并设 $i_1: (L_1\cap L_2, v_0)\subset(L_1, v_0)$ 和 $i_2: (L_1\cap L_2, v_0)\subset(L_2, v_0)$. 证明 $E(K, v_0)$ 同构于 $E(L_1, v_0)$ 和 $E(L_2, v_0)$ 的自由积对一由集合 $\{(i_{1*}[\zeta])\circ(i_{2*}[\zeta])^{-1} \mid [\zeta]\in E(L_1\cap L_2, v_0)\}$ 生成的正规子群的商群.
3. 若 G 是有限置换群, 证明存在有限连通 2 维单纯复形 K, 其棱道群同构于 G.
4. 设 X 是以 $x_0\in X$ 为基点的空间. 证明存在多面体 Y, 有基点 $y_0\in Y$, 及连续映射 $f: (Y, y_0)\to(X, x_0)$ 使 $f_{\#}: \pi(Y, y_0)\approx\pi(X, x_0)$.

G 覆盖的神经

若 $\mathscr{U}=\{U\}$ 是空间 X 的开覆盖且 $K(\mathscr{U})$ 是其神经, 一个典型映射 $f: X\to|K(\mathscr{U})|$ 是个连续映射, 使 $f^{-1}(\operatorname{st} U)\subset U$(对每 $U\in\mathscr{U}$).

1. 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的局部有限开覆盖, 证明存在典型映射 $X\to|K(\mathscr{U})|$ 和从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分割之间的一一对应.
2. 若 $\mathscr{U}$ 是 X 的局部有限开覆盖, 证明任两个典型映射 $X\to|K(\mathscr{U})|$ 是同伦的.

   若 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖, $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的一个典型投射是个函数 φ, 把每个 $V\in\mathscr{V}$ 变为元素 $\varphi(V)\in\mathscr{U}$, 使 $V\subset\varphi(V)$.
3. 证明从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的典型投射定义一单纯映射 $K(\mathscr{V})\to K(\mathscr{U})$, 且从 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的两个典型投射定义邻接的单纯映射 $K(\mathscr{V})\to K(\mathscr{U})$.

---

[*] 其拓扑情况见 P. Olum: Non abelian cohomology and Van Kampen's theorem, *Ann. of Math.*, Vol 68, 658~668, 1958.——原注

4. 若 $\varphi: K(\mathscr{V})\to K(\mathscr{U})$ 是典型投射定义的单纯映射，且 $f: X\to|K(\mathscr{V})|$ 是典型映射．证明合成 $|\varphi|\circ f: X\to|K(\mathscr{U})|$ 是典型映射．
5. 设 X 是拟紧致空间，且设 $g: X\to|K|$ 是连续映射（其中 K 是单纯复形）．证明存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{U}$ 和单纯映射 $\varphi: K(\mathscr{U})\to K$，使对任意典型映射 $f: X\to|K(\mathscr{U})|$，合成 $|\varphi|\circ f$ 同伦于 g．［提示：选 $\mathscr{U}$ 为开覆盖 $\{g^{-1}(\operatorname{st}v)|v$ 是 K 的顶点$\}$ 的任意局部有限开加细，且对 $U\in\mathscr{U}$，选 $\varphi(U)$ 为 K 的顶点，使 $U\subset g^{-1}(\operatorname{st}\varphi(U))$．］
6. 设 X 是紧致 Hausdorff 空间且设 K 是单纯复形．证明有双映

$$\lim_{\to}\{[K(\mathscr{U}), K]\}\approx[X; |K|],$$

其中顺向极限是相对于 X 的有限开覆盖族，由典型投射诱导的映射的加细的关系给出顺向，此双映由典型映射诱导出来．

H 维数理论

拓扑空间 X 称作**有维数** $\leqslant n$，简写为 $\dim X\leqslant n$，若 X 的每个开覆盖有一开加细，其神经是维数 $\leqslant n$ 的单纯复形．若 $\dim X\leqslant n$，但 $\dim X\not\leqslant n-1$，则 X 称作**有维数** n，记为 $\dim X=n$．若 $\dim X\not\leqslant n$（对任意 n），我们记作 $\dim X=\infty$．

1. 若 A 是 X 的闭子集，证明 $\dim A\leqslant\dim X$．
2. 若 K 是有限单纯复形，且 $\dim K\leqslant n$，证明 $\dim|K|\leqslant n$．
3. 若 s 是 n 维单纯形，证明 $\dim|s|=n$．［提示：设 $\mathscr{U}$ 是 $|s|$ 的由 s 的顶点的开星形组成的开覆盖，且假设有 $\mathscr{U}$ 的加细 $\mathscr{V}$ 使 $\dim K(\mathscr{V})\leqslant n-1$．设 K' 是 s 的比 $\mathscr{V}$ 细的重分．存在单纯映射 $K'\to K(\mathscr{V})\to s$，其合成 λ 是恒同映射 $|K'|\subset|s|$ 的单纯逼近．］
4. 设 X 是拟紧致空间，$\dim X\leqslant n$．证明任意映射 $X\to S^m$ 对 $m>n$ 是零伦的．
5. 设 X 是紧致度量空间，且设 C 是映射 $f: X\to\mathbf{R}^{2n+1}$ 的空间，由度量

$$d(f, g)=\sup\{\|f(x)-g(x)\|\,|\,x\in X\}$$

给出拓扑．证明 C 是完备度量空间，且若

$$C_m=\left\{f\in C\,|\operatorname{diam}f^{-1}(z)<\frac{1}{m},\ 对所有\ z\in\mathbf{R}^{2n+1}\right\},$$

证明对每个正整数 m，C_m 是 C 的开子集，且 $\bigcap C_m$ 是 X 到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 的同胚的集合．
6. 若 X 是紧致度量空间，维数 $\leqslant n$，证明对每正整数 m，C_m 是 C 的稠密子集．［提示：设 $\mathscr{U}$ 是 X 的直径 $<\frac{1}{m}$ 的集合作成的有限开覆盖，使

$$\dim K(\mathscr{U})\leqslant n.$$

且设 $h:|K(\mathscr{U})|\to\mathbf{R}^{2n+1}$ 是 $K(\mathscr{U})$ 的实现．若 $f:X\to K(\mathscr{U})$ 是任意典型映射，则 $h\circ f\in C_m$．给定 $g:X\to\mathbf{R}^{2n+1}$ 及给定 $\varepsilon>0$，证明选 $\mathscr{U}$ 和 h 如上是可能的，从而 $d(h\circ f, g)<\varepsilon$．]

7．若 X 是紧致度量空间，维数 $\leqslant n$，证明 X 可嵌入 $\mathbf{R}^{2n+1}$．（事实上，X 到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的同胚的集合在 C 中是稠密的．）

索　引

按汉语拼音

B
半局部单连通空间　89
伴随函子　45
包含映射　1
胞腔的示性映射　172
比覆盖细的单纯复形　145
比覆盖细的三角剖分　145
闭单纯形　128
闭包复形　145
柄　175
不动点　178
C
乘法　40
乘法的同伦单位　40
乘法的结合律　40
乘法的同伦逆　40
承载子　130
初始对象　28
重分　141
重数　83
D
代数基本定理　68
单纯逼近　148
单纯逼近定理　150
单纯复形　125
单纯复形的顶点　125
单纯复形的度量拓扑　128
单纯复形的分支　163
单纯复形的空间　127
单纯复形的联接　126
单纯复形的弱拓扑　128
单纯复形的上凝聚拓扑　128
单纯复形的维数　125
单纯复形的子复形　125
单纯偶　127
单纯偶的范畴　127
单纯形　125
单纯形的面　125
单纯形的维数　125
单纯形中的重心　135
单纯映射　126
单纯映射柱　179
单函数　2
单同态　7
单位 n 维球丛　106
单位切丛　106
单位态　15
单序　2
单映　2
道路　53
道路类范畴　55
道路的积　53
道路的同伦　53
道路的始　53
道路的终　53
道路分支　56
道路空间　85
道路类　53
道路连通的　56
等价　2

等价关系 2
等价类 2
底空间 74
点标单纯复形 127
点标集 16
点标拓扑空间 16
点标拓扑空间的同伦范畴 28
典型投射 179
典型映射 179
对立范畴 18
对某族的上紧致拓扑 6
对象 15
多面体 131
多面体偶 131
多面体偶的同伦扩充性质 137
多元函子 24
F
反变函子 20
范畴 15
范畴的积 18
范畴中的和 19
范畴中的积 19
范畴中的逆向体系 19
方体 11
仿射单形 11
仿射无关集 12
复数域上的 n 维直丛 104
覆叠变换 98
覆叠空间 70
覆叠投射 70
附加空间 65
赋值映射 6
非基本的映射 26
G
共轭类 52
构造群 104
广群 52
广群的分支 52
广义透镜空间 102
轨道 100
轨道空间 100
轨道空间的基本群 100
骨架 125
H
函数的合成 3
函子 20
环面 176
回路 43
回路函子 45
回路空间 43
J
基本广群 55
基本群 58
基点 16
基顶点 127
积丛 104
集合和 1
集合积 1
间断群 100
交叉帽 175
交换H群 41
交换H广群 45
交换图表 17
截面 87
紧致开拓扑 6
紧致生成空间 6
局部道路连通空间 73
局部可缩空间 66
局部连通性 121
局部纤维化 106
局部体系 67
局部同构 122
局部同构群 122
局部同胚 70
局部同态 122
局部有限单纯复形 139
绝对邻域收缩核 65
绝对 n 维圈 175

绝对收缩核 65

K

开单纯形 130

可数覆盖 108

可缩空间 29

可形变子空间 34

空间的偶 25

控制函数 120

扩充 23

扩充升降函数 23

扩充问题 23

L

类星形子集 61

棱 158

棱道 158

棱道的等价 159

棱道的积 158

棱道广群 159

棱道群 160

棱的始点 158

棱的终点 158

连通单纯复形 163

连通覆叠空间范畴 90

连通广群 52

邻接单纯映射 152

邻接范畴 153

邻接类 152

零伦映射 26

伦型 29

M

满函数 2

满同态 7

满映 2

满子范畴 17

满子复形 136

模的秩 10

N

挠子模 10

挠自由模 10

逆向极限 4

逆向体系中的逆向极限 4

O

欧氏空间 11

偶的范畴 17

偶的强形变收缩核 38

偶的同伦范畴 28

偶的映射 25

偶的映射柱 38

P

偏序 2

偏序集 2

片数 83

平凡纤维丛 106

平均覆叠子集 70

Q

齐次 n 维单纯复形 178

纤维 74

纤维丛 103

纤维丛的等价 106

纤维丛的纤维化性质 112

纤维丛的总空间 103

纤维化 74

纤维化的自等价 97

纤维化范畴 76

纤维积 79

纤维同伦 116

纤维同伦等价 117

强形变收缩核 34

切丛 104

球 11

球的基本群 68

曲面 175

曲面的基本群 176

全序 2

群的显示 7

群的有限显示 8

群的自由生成集 7

群关系 7

衍生成元 7
R
弱收缩 32
弱收缩核 32
弱拓扑 6
弱形变收缩 34
弱形变收缩核 34
S
三角剖分 131
商集 2
商空间 5
上乘法 45
上乘法的同伦单位 45
上乘法的同伦结合律 45
上乘法的同伦逆 46
上凝聚拓扑 6
上纤维积 115
上纤维化 33
上诱导拓扑 6
射影空间 11
射影空间的覆叠空间 92
射影空间的基本群 92
神经 125
升腾 74
升腾的映射 74
升腾定理 86
升腾函数 106
升腾问题 73
实现 139
实心球 11
示性映射 105
收缩 32
收缩函数 113
收缩核 32
疏空间 29
树 163
双函数 2
双映 2
双正规空间 65
顺向集 3
顺向极限 3
顺向体系 3
顺向体系的顺向极限 3
T
态 15
态的合成 15
态的逆 15
态范畴 17
贴加映射 172
贴加胞腔得到的空间 172
同伦 25
同伦单位 40
同伦等价 28
同伦范畴 28
同伦交换乘法 40
同伦交换图表 28
同伦结合律 40
同伦类 27
同伦逆 29
同伦扩充性质 32
同伦群 50
同伦升腾性质 74
同态模 9
同纬映象 47
同纬映象函子 49
投射 2
透镜空间 101
透镜空间的基本群 101
拓扑和 5
拓扑积 5
拓扑空间的同伦范畴 28
拓扑空间的维数 130
拓扑偶 25
拓扑群的覆叠 123
凸集 12
凸体 12
图 163
图表的交换性 17

图表的同伦交换性　28
图的基本群　167
图的棱道群　166
W
万有覆叠空间　92
万有纤维化　97
网格　145
无边的伪流形　175
无不动点的群作用　100
维数理论　180
唯一道路升腾　77
唯一升腾性质　74
伪流形　178
伪流形的边缘　178
X
限制　2
线段　11
线性度量　145
相对于子空间的同伦　35
向量丛　164
小范畴　15
协变函子　20
星形　132
形变　34
形变收缩　34
形变收缩核　34
循环模　10
Y
压缩　29
映射道路纤维化　116
映射的层数　62
映射的升腾　74
映射的同伦　25
映射柱　37
有唯一道路升腾的纤维化　77
有限单纯复形　126
有限生成模的构造　10
诱导重分　144
诱导覆叠投射　115
诱导纤维丛　115
诱导纤维化　115
诱导上纤维化　116
诱导拓扑　5
约化同纬映象　47
Z
张量积　8
真间断群　100
真面　125
正则纤维化　84
直线　11
指数对应　7
指数法则　7
指数映射　61
终止对象　18
重心　135
重心重分　143
重心坐标　128
锥形　65
锥形的底　65
锥形的顶点　65
子范畴　16
子偶　25
自然变换　24
自然等价　24
自同态　10
自同态的迹数　10
自由基　9
自由模　9
自由群　7

按西文字母顺序排

Borsuk 同伦扩充定理　66
Borsuk-Ulam 定理　122
Brouwer 不动点定理　178
G 构造　104
H 空间　40
H 空间的同态　41
H 群　40

H 上群　45
H 上群的同态　46
Hopf 丛　105
Hurewicz 纤维空间　74
Klein 瓶　176
n 连通空间　59
n 维面丛　104
n 维球丛　105
Noether 同构定理　8
Sperner 引理　178
Van Kampen 定理　179
Zorn 引理　3